Российский журнал менеджмента
Том 5, № 3, 2007. С. 3–14

НОВЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ИНДЕКС РИСКОВАННОСТИ

Р. ДЖ. АУМАНН
Еврейский университет, г. Иерусалим

С 28 по 29 июня 2007 г. в Высшей школе менеджмента СПбГУ проходила Международная научная конференция «Теория игр и менеджмент» («Game Theory and Management», GTM2007)*. Научная проблематика конференции еще раз подтвердила междисциплинарность проблем менеджмента, а представленные результаты теоретических и прикладных исследований вызвали взаимный интерес у специалистов по теории игр и менеджменту. Мы предлагаем вниманию читателей русский перевод доклада Нобелевского лауреата в области экономики 2005 г., профессора Роберта Ауманна (Robert J. Aumann), представленного им 28 июня 2007 г. на пленарном заседании конференции GTM2007.

Профессор Роберт Ауманн — выдающийся ученый в области теории игр и ее приложений. Он автор более 80 широко известных академических публикаций и 6 монографий, член редколлегии двух ведущих мировых журналов по теории игр, входил в состав редколлегий журналов по экономической теории, математической экономике, эконометрике, исследованию операций. Р. Ауманн — один из организаторов и научных руководителей первого в мировой практике Центра теории игр в экономике, созданного в Нью-Йоркском университете (Стони Брук, США) в 1989 г. (Center for Game Theory in Economics, Stony Brook). В 1990 г. он был одним из основателей научного центра по исследованию рационального поведения в Еврейском университете г. Иерусалима как междисциплинарного научного центра, проводящего исследования на основе теории игр с привлечением специалистов других направлений, включая менеджмент и бизнес, экономику и финансы, психологию, информатику, право, математику, экологию, философию и другие науки. Он работал приглашенным профессором в университетах Принстона, Йеля, Стэнфорда, Лувена, Беркли, Стони Брук и Нью-Йорка. Является членом Американской академии Искусств и Наук, Национальной академии наук (США), Британской академии, Израильской академии наук, Почетным доктором университетов Чикаго, Бонна, Лувена, лауреатом многочисленных международных научных премий, включая Нобелевскую премию в области экономики за 2005 г.

---

* Подробнее о работе Международной научной конференции «Теория игр и менеджмент» см. в разделе «Хроника» настоящего номера журнала.

В пленарном докладе на конференции профессор Р. Ауманн изложил свой подход к определению и вычислению индекса рискованности*. Следует отметить, что проблематика доклада не является теоретико-игровой в буквальном смысле. Она находится на стыке теории игр с теориями полезности и риска. В своем выступлении Р. Ауманн объяснил причины, по которым он обратился к исследованию проблемы рискованности. Основной результат состоит в определении понятия экономического индекса рискованности и его аксиоматической характеризации, что оформлено в виде теоремы. Данное обстоятельство с одной стороны делает прозрачными смысл введенного понятия, его свойства, с другой — наводит на размышления, связанные со смысловой интерпретацией системы аксиом, вычислением индекса рискованности, связью введенного понятия с другими известными в теории риска и теории финансов показателями. Излагая полученные результаты, Р. Ауманн старается не перегружать слушателей математическими и техническими деталями предлагаемого им подхода к оценке рискованности. Однако неизбежная при устном изложении «нестрогость» высказываний потребовала введения определенных разъяснений читателям в процессе подготовки письменного текста доклада к публикации. Надеемся, что публикация на страницах «*Российского журнала менеджмента*» данного выступления сыграет важную роль в сближении тематики теории игр и проблематики исследований по менеджменту в России.

От редакции

Когда я первый раз приезжаю в страну, языка которой совсем не знаю, первое слово, которое я стараюсь узнать, — это слово, выражающее благодарность. Поэтому мне хочется сказать организаторам этой конференции, Высшей школе менеджмента СПбГУ, Леону Петросяну** и всем вам: «Спасибо». Я впервые в России, и это чудесное событие. Это время года, ваш изумительный город и этот прекрасный зал — все это действительно великолепно. Мне кажется уникальным в мировой практике, что такой величественный зал принадлежит школе менеджмента. Итак, еще раз «спасибо», и я очень рад, что имею удовольствие быть здесь и проводить эту презентацию.

Прежде чем начать, мне хотелось бы сделать два замечания. В своем вступительном слове профессор Леон Петросян упомянул мою связь с корпорацией RAND, которая, как, вероятно, многие из вас знают, была одним из инструментов ведения холодной войны. В этой связи, возможно, о ней и не стоило бы упоминать. Но вместе с тем с корпорацией RAND связан один из двух моих самых крупных провалов в жизни. Получив степень бакалавра в городском колледже Нью-Йорка, я пытался поступить в магистратуру разных университетов США. И меня готовы были принять на математическую кафедру любого из них, за исключением одного, отказавшего мне. Это был Принстонский университет, где на тот момент имелась самая сильная кафедра математики в мире. Таков был мой первый провал. Вторым стала корпорация RAND. После защиты магистерской диссертации в Массачусетском технологическом институте, которая была посвящена чистой математике, я приступил к работе на кафедре математики Принстонского университета (тогда они меня приняли). Я начал заниматься теорией игр и после двух лет работы, уже имея докторскую сте-

* Полный текст представленного научного результата см.: в Aumann R. J., Serrano R. 2007. *An Economic Index of Riskiness*. Discussion Paper No. 446, Center for the Study of Rationality, The Hebrew University of Jerusalem. http://www.ratio.huji.ac.il/dp_files/dp446.pdf — *Прим. ред.*

** Л. А. Петросян, д. ф.-м. н., декан, заведующий кафедрой математической теории игр и статистических решений факультета прикладной математики — процессов управления СПбГУ, известный специалист в области динамических игр, сопредседатель конференции Game Theory and Management-2007. — *Прим. ред.*

пень, стал искать работу в разных организациях США и Израиля. И вновь мне отказали только в одном месте. Все организации нашли что мне предложить, кроме корпорации RAND, откуда пришло письмо: «Нам очень жаль, но мы не можем Вам ничего предложить». В то время с ними уже работал крупный специалист в области теории игр — Ллойд Шепли*. Впоследствии я стал работать на них в качестве консультанта, работал вместе с Шепли, но сначала они меня не приняли. Итак, это было первое из двух замечаний, которые я хотел сделать.

Второе замечание касается того, что профессор Леон Петросян сказал об играх с нулевой суммой (zero sum games). Он сказал, что их проще всего решать. Да, это так. Но есть одно «но». Когда у меня берут интервью, то часто задают вопрос: «Что такое теория игр?» Когда я начинаю объяснять и спрашивающие, как правило, ничего не понимают, они обычно задают следующий вопрос: «Как можно применять теорию игр в повседневной жизни?» Я отвечаю по-разному, но один из ответов стоит упомянуть сейчас. Это жизненный принцип: «Пытайтесь мотивировать других игроков так, чтобы они делали то, что бы вы хотели, чтобы они делали». Этот принцип применим для повседневной жизни и для всей теории игр, кроме игр с нулевой суммой.

Игры с нулевой суммой имеют большое значение для теории игр, но они не занимают в ней центральное место. Я бы назвал их краеугольным камнем теории игр. Краеугольный камень имеет огромное значение для всего здания, без него невозможно ничего построить, но это элемент, который находится в углу, а не в центре.

* Ллойд С. Шепли (Lloyd Stowell Shapley, р. 1923) — известный американский математик и экономист. В 1940-х гг. работал вместе с фон Нейманом и Моргенштерном. Известный специалист в области теории игр. В 1952 г. ввел понятие «значения игры», которое впоследствии стали называть вектором Шепли (Shapley value). — *Прим. ред.*

Теория игр началась с игр с нулевой суммой, но с тех пор она прошла долгий путь. И сегодня, если ты хочешь проверить новую идею, новое определение или новый метод расчетов, сначала проверь его на примере игры с нулевой суммой и только потом переходи к примерам игр с ненулевой суммой, которые и являются центральным элементом теории игр.

Сегодня я хотел бы поговорить о том, что, возможно, тоже не является центральным элементом теории игр, но представляет собой один из ее краеугольных камней. Эта тема тесно связана с теорией полезности и даже больше связана с менеджментом, чем с теорией игр. Но теория игр и здесь находит применение. Это управление риском (management of risk).

Начнем с того, что, прежде чем управлять риском, его нужно оценить. Насколько рискованной окажется азартная игра (gamble)? Если вы инвестируете в какой-то проект, то можете заработать деньги, а можете их потерять. Сколько вы можете заработать и сколько потерять? Часто можно услышать, что рискованные инвестиции хороши для тех, у кого есть «мягкая подушка», которая подстрахует в случае провала. Это не для пенсионеров, которые не в состоянии перенести потери. То, что рискованно для одних людей, другим кажется вполне оправданными инвестициями. Но что значит «более рискованно» или «менее рискованно»? Об этом мы и поговорим.

Хочу представить вам работу, которую я написал в соавторстве с Роберто Серрано из Университета Брауна. Сперва мы назвали ее «Индекс рискованности» («Index of Riskiness»). Дело в том, что, когда мы приступили к работе над этой проблемой, около двух или трех лет назад, мы считали, что рискованность — это нечто еще никем не определенное. Мы начали с того, что просто изучали различные азартные игры и пытались понять, насколько они рискованны. Впоследствии это оказалось не так, и мы изменили название.

В экономике, в теории полезности, изучается несклонность к риску (risk aversion). Измерение риска сводится к измерению несклонности рисковать, а как измерить сам риск, не было известно или, по крайней мере, не было широко известно. Представьте себе ситуацию, когда человек говорит, насколько ему не нравится, когда слишком холодно, но при этом не может измерить саму температуру. Это абсурд. В экономике сложилась именно такая ситуация. Ученые могли сказать, насколько людям не нравится риск, но не могли указать, насколько что-то рискованно.

Одним из отцов-основателей теории несклонности к риску был Кеннет Эрроу*, с которым меня связывает уже почти 30- или даже 40-летняя дружба. У этой теории было два отца — К. Эрроу и Ш. Пратт, но с Шенноном Праттом мне не довелось быть знакомым. Итак, однажды в Университете Брауна мы сидели вместе с Роберто Серрано и раздумывали над этой проблемой. Я сказал: «Может, позвоним Эрроу и спросим у него, как измерять риск. Он ведь создал теорию несклонности к риску, он-то должен знать!» Мы позвонили Эрроу, и он ответил: «Нельзя измерить риск. Это невозможно. Можно измерить несклонность к риску, а риск измерить нельзя. Не существует показателя для измерения риска». Мы ответили: «Ладно, придется нам его изобрести». Тогда-то мы и назвали предмет нашего исследования «индекс рискованности». Потом мы обнаружили, что К. Эрроу, похоже, не следил за литературой и, на самом деле, различные показатели рискованности уже были предложены, хотя и не были широко известны. Многие из них нас не устраивали по тем или иным причинам, о которых я расскажу позже. В результате мы решили переименовать наш показатель в экономический индекс рискованности, так как он отвечал определенным экономическим требованиям.

* Кеннет Эрроу (Kenneth Arrow, р. 1921) — американский экономист, удостоенный в 1972 г. (совместно с Дж. Хиксом) Нобелевской премии по экономике. — *Прим. ред.*

Например, существует такой показатель рискованности, как коэффициент Шарпа (Sharp ratio). Он рассчитывается как отношение стандартного отклонения выигрыша в конкретной игре к его математическому ожиданию. Если математическое ожидание больше, то риск снижается. Чем больше вы ожидаете, тем менее рискованная игра. В свою очередь, если стандартное отклонение больше, то рискованность возрастает. Вполне логично утверждать, что это и есть показатель рискованности. На самом деле финансовые аналитики пользуются им достаточно часто. Но иногда он дает странные результаты.*

Возьмем две азартные игры или две инвестиции. Пусть первая будет с вероятностью единица приносить больший доход, чем вторая. Таким образом, первая обязательно принесет больше денег, что бы ни случилось. Несмотря на это, коэффициент Шарпа может показать, что первая игра, которая наверняка принесет больше денег, является более рискованной, чем вторая. Только безумец со-

* Обычно коэффициент Шарпа рассчитывается так:

$$Sharpe\ ratio = \frac{E\left[R - R_f\right]}{\sigma},$$

где R — доходность актива, являющаяся случайной величиной, R_f — безрисковая ставка, σ — стандартное отклонение доходности, E — оператор математического ожидания. В таком контексте коэффициент Шарпа оценивает не рискованность актива, а эффективность стратегии с нулевыми инвестициями (покупается актив с доходностью R и продается актив с доходностью R_f). На самом деле, говоря о показателе рискованности Шарпа, автор имеет в виду величину, обратную коэффициенту Шарпа при $R_f = 0$, т. е. показатель рискованности Шарпа равен σ/μ, где $\mu = E[R]$. — *Прим. ред.*

гласится с тем, что что-то наверняка приносящее больше денег более рискованно, чем то, что наверняка принесет меньше денег. Все дело в том, что делимое коэффициента Шарпа (стандартное отклонение) измеряет разброс параметров. А разброс может оказаться огромным, несмотря на то что ты наверняка получишь деньги.

Для подтверждения сказанного рассмотрим очень простой пример. Возьмем две игры. Одна игра наверняка принесет нам доход в размере сто долларов (или рублей). Другая игра равновероятно принесет доход либо в сто, либо в двести долларов. Какую игру следует выбрать? Какая игра будет менее рискованной? Очевидно, что вторая будет менее рискованной, потому что вы получите наверняка больший доход. Однако ее стандартное отклонение будет больше, значительно больше. Таким образом, разброс — не лучшая мера оценки риска, даже деленный на математическое ожидание. Такой показатель зачастую не работает, поэтому данный показатель рискованности нельзя считать экономическим показателем.

Как я уже сказал, наша идея заключалась в том, чтобы определить объективную меру риска, которая не будет зависеть от индивидуальной оценки риска. В теории несклонности к риску все зависело от индивидуума. Мы хотели получить нечто от него не зависящее. Мы хотели получить точную температуру. Это должно было быть нечто, что можно было бы использовать для того, для чего используют коэффициент Шарпа, в частности для оценки риска инвестиций. Мы хотели понять, что означает фраза: «Это слишком рискованно для тебя».

Теперь перейдем к техническим вопросам. Определимся, что мы понимаем под термином «азартная игра» (gamble). Азартная игра — это случайная величина g (измеряемая в долларах, рублях или других денежных единицах), которая принимает как положительные, так и отрицательные значения и имеет положительное математическое ожидание. Почему обязательно должны быть как положительные, так и отрицательные значения?

Если нет отрицательных значений, то рискованность равна нулю. Вы вообще ничем не рискуете. Почему обязательно положительное ожидание? Это связано с классическим определением Эрроу и Пратта: индивид является несклонным к риску, если его функция полезности является вогнутой. Вогнутая функция полезности предполагает, что игра, имеющая отрицательное ожидание, не будет принята индивидуумом.* Для экономики, теории полезности, традиционно допущение о том, что люди несклонны к риску. Некоторые несклонны в большей, некоторые — в меньшей степени, однако несклонны к риску все. Не думаю, что в реальности это обязательно так, но большинство людей все-таки несклонны к риску и не будут играть в игру с отрицательным ожиданием.

Мы взяли понятие несклонности к риску, которое так близко экономистам, и попытались перевернуть его таким образом, чтобы объективно определить риск. Это похоже на попытку определить, какая вещь холоднее по тому, скольким людям она не нравится, ведь по мере снижения температуры все большее число людей испытывает дискомфорт. Базовая проблема, которую мы стремились разрешить, состояла в следующем. Согласно

---

* В этой работе Р. Ауманн рассматривает функцию полезности агента $u(\omega)$, где ω — уровень его благосостояния, в предположении строгой монотонности, вогнутости и дважды непрерывной дифференцируемости. Простейшим примером такой функции является $u(\omega)=\omega$. При этом он предполагает, что агент примет игру g при заданном уровне благосостояния ω, если $E[u(\omega+g)] > u(\omega)$. Понятно, что если $E[g] < 0$, то агент не примет игру g ни при каком уровне благосостояния ω. — *Прим. ред.*

существовавшей теории, менее несклонный к риску человек заведомо принимал менее рискованную игру. Однако логично было бы ожидать обратное — менее несклонный к риску человек, т. е. человек, который с большей готовностью идет на риск, должен принимать более рискованную игру. Это базовое требование, которому должны были удовлетворять результаты нашего исследования. Мы хотели определить, что значит «рискованный». Мы хотели понять, что делает одну игру более рискованной, чем другая. По сути, мы искали количественное выражение или хотя бы порядковое, которое точно скажет, что является более, а что — менее рискованным. Вот в чем мы видели свою задачу. Мы назвали это *аксиомой двойственности*. В нашем исследовании рискованность определяется через несклонность к риску и, таким образом, является двойственной по отношению к несклонности к риску. Это основная идея.

Теперь важно отметить, что более рискованный — не значит менее желанный. Риск часто рассматривают как нечто нежелательное, но если одно опаснее, чем другое, это вовсе не означает, что оно менее желанно. Все зависит от человека. Некоторые в большей степени готовы идти на риск, некоторые — в меньшей. Некоторые люди любят, когда холодно. Например, для лыжников холодная погода лучше, чем теплая. Когда холодно, снег менее липкий, а когда тепло — снег подтаивает и кататься не так приятно. Если вы любите кататься на лыжах, то вам нравится погода похолоднее. Если не любите — то вы предпочитаете, чтобы было теплее. Все зависит от вас. Тот, кто относительно склонен к риску (я говорю относительно, потому что мы предполагаем, что все несклонны к риску), вероятно, выберет из двух игр более рискованную.

К. Эрроу и Ш. Пратт определили коэффициент несклонности к риску как отношение второй производной функции полезности к ее первой производной, взятое с противоположным знаком.* Чтобы вычислить показатель несклонности к риску, вы выбираете конкретный уровень благосостояния, который обозначим ω, т. е. некоторое количество денег, которое у вас есть, выбираете функцию полезности $u(\omega)$ для этих денег, вычисляете вторую производную u'', делите ее на первую производную u' и меняете знак. Знак необходимо поменять потому, что отношение производных u''/u' окажется отрицательным числом. Речь идет о монотонной вогнутой функции; значит, вторая производная u'' должна быть отрицательной, первая u' — положительной, а частное — отрицательным. Мы добавляем минус, чтобы получить положительное число.

Итак, назовем полученное выражение показателем несклонности к риску. Это хорошее определение. Его содержание интуитивно понятно, но мы не будем на этом останавливаться. Обратим внимание лишь на то, что это локальное понятие. Оно зависит от достатка человека, а поэтому не является тем, что можно было бы применить непосредственно к игре. Вообще, оно не применимо к игре в двух смыслах. Прежде всего, если вы принимаете игру, то она изменит ваше благосостояние. Получается, что этот показатель применим к играм, которые бесконечно малы.** Если вы при-

* В введенных обозначениях функции полезности коэффициент несклонности к риску Эрроу–Пратта можно просто записать в виде: $\rho(\omega, u) = -u''(\omega)/u'(\omega)$. — *Прим. ред.*

** Если агент принимает игру g при уровне его благосостояния ω, то уровень его благосостояния становится $\omega + g$. Тогда коэффициент несклонности к риску следует считать так: $\rho(\omega + g, u) = -u''(\omega + g)/u'(\omega + g)$. В силу предположения о дважды непрерывной дифференцируемости и строгой монотонности функции полезности имеем: $\rho(\omega + g, u) \approx \rho(\omega, u)$, когда g — бесконечно малая величина. — *Прим. ред.*

мете не бесконечно малые игры, то значительно отклонитесь от своего первоначального благосостояния ω. Таким образом, индекс Эрроу–Пратта может измерять несклонность только к бесконечно малым играм. Но большинство игр не так уж мало. Они имеют «конечный размер», но в то же время зависят от вашего текущего благосостояния, не только от функции полезности, но и от того, какое у вас сейчас финансовое положение. Таким образом, это частная концепция в обоих смыслах. Мы же ищем нечто общее. Мы хотим определить несклонность к риску в смысле Эрроу–Пратта, но так, чтобы это определение оказалось применимо к играм с конечным размером и чтобы оно не являлось функцией благосостояния. Это два базовых требования, которым должны отвечать наши результаты.

Есть такой словарь «Новый словарь экономики Палгрейва» (New Palgrave Dictionary of Economics). Его издали 20 лет назад, в 1987 г. Это даже не словарь, а энциклопедия экономики. В нем можно найти статью по любому экономическому вопросу. Сейчас готовится новое издание, которое выйдет через год или два. В нем будет статья Марка Мачина (Mark Machin) и Майкла Ротшильда (Michael Rothschild), посвященная риску. Она называется не «рискованность», а просто «риск».

В этой статье утверждается, что рискованность — это то, что ненавидят несклонные к риску. Таким образом, Мачин и Ротшильд сделали то же, что и мы, — перевернули определение. Взяли известное определение несклонности к риску и перевернули его, чтобы определить рискованность. Мы пытаемся сделать то же, но для ответа на поставленный вопрос необходимо сначала определить несклонность к риску в глобальном, а не в локальном виде, т. е. сделать так, чтобы его можно было применить к играм конечного размера и чтобы оно не зависело от уровня благосостояния, с которым вы вступаете в игру. Тогда это будет искомое определение несклонности к риску. В таком случае мы сможем считать индивидуума i по меньшей мере настолько же несклонным к риску, насколько j, если j принимает каждую из игр, которые принимает i. И не важно, каковы уровни их благосостояния. Если j принимает каждую игру, которую принимает i, то он менее (или также) несклонен к риску, как и i. В свою очередь, i более несклонен к риску, чем j, если он, по меньшей мере, так же несклонен к риску, как j, но не наоборот.* Это стандартное определение перехода от нестрогого частичного порядка к строгому частичному порядку.

Прежде чем продолжить, я хочу, чтобы вы поняли, что данное определение является очень сильным предположением. Такой частичный порядок почти никогда не реализуется. Согласно определению, человек принимает любую из игр, которую принимает другой, независимо от их уровней благосостояния. Другими словами, даже если один из них богат, а другой — очень беден. Этого почти никогда не происходит, потому что несклонность к риску действительно зависит от уровня благосостояния. Вот почему это очень-очень сильное предположение. Однако, как мы увидим позже, оно подходит для наших целей.

Теперь перейдем к определению понятия индекса, который должен измерять рискованность в виде числовой функции на множестве азартных игр. Мы определим его с помощью двух аксиом: аксиомы двойственности и аксиомы однородности.

Аксиома двойственности гласит, что если индивидуум i более несклонен к риску, чем j (в соответствии с нашей

---

* Тот факт, что агент i более несклонен к риску, чем агент j, будем обозначать так: $i \succ j$. — *Прим. ред.*

очень сильной гипотезой), и если i принимает игру h, которая, согласно индексу, будет рискованнее, чем другая игра g, тогда обязательно j должен принять игру h. Вам это ничего не напоминает? Это как раз то самое базовое требование, которое мы задали себе в начале: менее несклонный к риску человек должен заведомо принимать менее рискованную игру. «Но насколько эта аксиома оправдана?» — спросите вы. Ответ в том, что эта аксиома вполне оправдана, так как в ее основе лежит очень сильная гипотеза. Когда в качестве условия аксиомы используется сильная гипотеза, сама аксиома становится слабой. Таким образом, именно сила гипотезы, определяющей более несклонного к риску человека, делает эту аксиому вполне приемлемой. Можно сказать, это — минимально необходимое условие для идеи рискованности.*

Аксиома однородности, в свою очередь, гласит, что если вы принимаете игру и удваиваете ставку, тогда и риск будет в два раза выше. Она задает определенную числовую шкалу. В то время как первая аксиома устанавливает порядок, т. е. указывает на то, что более рискованно, чем другое (но не говорит насколько), вторая аксиома, по сути, закрепляет числовые значения индекса.**

Вообще, практически все азартные игры имеют отрицательное ожидание. Помните «Игрока» Достоевского? Я, кстати, очень люблю его короткие повести, которые не так широко известны в мире, как его романы. Почти все азартные игры имеют отрицательное ожидание, за исключением «Блэк-Джека» или, как еще называют эту игру, «21». Эта игра имеет положительное ожидание, если играть правильно, для чего необходима очень хорошая память. Но даже если она у вас есть, вы все равно не сможете выиграть много денег. Как только вы начнете выигрывать, вас тут же попросят покинуть заведение. У меня есть студент по имени Авраам Нейман, который ездит кататься на лыжах на озеро Тахо и покрывает свои расходы за счет игры в «Блэк-Джек». В штате Невада разрешены азартные игры, но он выигрывает ровно столько, чтобы хватило на один день катания.

Итак, мы наконец подошли к основной теореме.

Теорема. *Для каждой игры g существует единственное положительное число $R(g)$, которое называется индексом рискованности игры g, для которого $E[e^{-g/R(g)}] = 1$.*

Таким образом определенный индекс рискованности $R(g)$ удовлетворяет аксиомам двойственности и однородности, при этом любой индекс рискованности, удовлетворяющий этим двум аксиомам, получается умножением $R(g)$ на некоторый положительный множитель.

Заметим, что математически выражение $e^{-g/R(g)}$ является случайной величиной, поскольку сама игра g является случайной величиной. Таким образом, мы ищем числовую функцию $R(g)$, которая делает математическое ожидание случайной величины $e^{-g/R(g)}$ равным единице. Эту функцию мы и называем *индексом рискованности игры g*. Две аксиомы, о которых мы говорили ранее, определяют эту числовую функцию единственным образом с точностью до положительного сомножителя.

Теперь поговорим о том, откуда взялась эта странная формула. Чтобы это понять, мы должны вернуться к Эрроу и Пратту и к тому, что называется CARA (constant absolute risk aversion — посто-

---

* Обозначим через $Q(g)$ индекс рискованности игры g. Тогда коротко аксиому двойственности можно записать так: если $i \succ j$, i принимает игру g и при этом $Q(g) > Q(h)$, то j обязательно принимает h. — *Прим. ред.*

** Аксиома однородности может быть записана так: $Q(tg) = tQ(g)$ для всех положительных чисел t. — *Прим. ред.*

янная абсолютная несклонность к риску). Итак, мы можем сказать, что некто абсолютно несклонен к риску, если его индекс Эрроу–Пратта $p(\omega, u) = -u''/u'$ не зависит от его благосостояния ω. Помните, я говорил, что индекс Эрроу и Пратта — это локальный индекс или локальный коэффициент в двух смыслах: во-первых, он применим только к бесконечно малым играм, а во-вторых, он зависит от уровня благосостояния. Это значит, мы должны наблюдать индивидуумов, для которых этот индекс не зависит от благосостояния, т. е. тех, у кого при любом благосостоянии, локальный индекс несклонности к риску всегда будет одинаков. Такое допущение, как оказывается, позволяет решить не только первую проблему локальности, но и вторую. Индивидуум имеет постоянную абсолютную несклонность к риску тогда и только тогда, когда для любой игры и любых двух уровней благосостояний индивидуум либо принимает игру на обоих уровнях, либо отказывается от нее на обоих уровнях. Другими словами, его решение уже не зависит от размеров игры.

Можно показать, что при абсолютной несклонности к риску полезность индивида имеет вид $u(w) = -e^{-\alpha w}$ (полезность, естественно, может быть умножена на положительную константу или увеличена на положительную константу). Теперь становится понятно, откуда берется показательная функция с отрицательным показателем в теореме. Рискованность $R(g)$ игры g равна величине, обратной параметру α.* Этот параметр характеризует конкретного индивидуума. Чем больше α, тем более человек несклонен к риску. Оказывается, что индекс рискованности равен обратному значению параметра α, который представляет собой абсолютную несклонность к риску индивида, которому все равно — принять игру или отказаться от нее.

* Другими словами $R(g) = 1/\alpha$. — *Прим. ред.*

Более несклонный к риску индивид не примет игру, менее несклонный — примет ее, но для любой игры существует только одна точка, один уровень постоянной абсолютной несклонности к риску, который лежит на границе принятия и отказа от игры. Мы находим обратное число, поскольку большее значение α соответствует большей несклонности к риску.

Теперь давайте перейдем непосредственно к свойствам индекса рискованности и коротко охарактеризуем некоторые из них.

Во-первых, индекс рискованности зависит только от распределения случайной величины g. Он зависит не от самой случайной величины, а только от ее распределения.

Во-вторых, он измеряется в денежных единицах. Коэффициент абсолютной несклонности к риску имеет размерность единицы, деленной на доллар. Мы берем обратное значение и получаем доллары.

В-третьих, он удовлетворяет свойствам стохастического доминирования первого и второго порядков. Стохастическое доминирование первого порядка одного риска над другим имеет место, когда выигрыш по первому риску, по крайней мере, наверняка равен выигрышу по второму и превышает выигрыш по второму с положительной вероятностью.* Большинство ранее определенных индексов не удовлетворяло этому условию. Величина риска, индекс Шарпа, который мы упоминали, и многие другие индексы не удовлетворяют условию стохастического доминирования даже первого порядка. Концепция стохастического доминирования второго порядка впервые была сформулирована Дж. Ханоком и Х. Леви,

* Говорят, что игра g стохастически доминирует по первому порядку игру g_*, если $g \geq g_*$ с вероятностью 1 и $g > g_*$ с положительной вероятностью. Записывается отношение стохастического доминирования первого порядка так: $g(FOD)g_*$. — *Прим. ред.*

а затем М. Ротшильдом и Дж. Стиглицом и другими, которые обнаружили ее независимо друг от друга. Стохастическое доминирование второго порядка означает, что бóльшая рискованность соответствует бóльшей дисперсии. Допустим, у нас есть две игры g и h, где g получена из h путем замены одного из значений h игрой с таким же математическим ожиданием, т. е. путем увеличения дисперсии. Например, возьмем игру, выигрыш которой составляет равновероятно −100 или +200 с вероятностями 0,5/0,5. Теперь заменим значение +200 на игру с выигрышами +150 и +250, которые случаются равновероятно. В результате получим новую игру, в которой выигрыш −100 получается с вероятностью 0,5, выигрыш +150 с вероятностью 0,25 и выигрыш +250 с вероятностью 0,25. Полученная игра будет иметь большую дисперсию и считается более рискованной, чем первоначальная игра. Это и есть стохастическое доминирование второго порядка. И монотонность нашего индекса рискованности отвечает требованию стохастического доминирования второго порядка.*

В-четвертых, он обладает свойством непрерывности. Непрерывность означает, что если у нас есть последовательность игр $\{g_n\}$ и g_n равномерно стремится к g, при стремлении n к бесконечности, тогда рискованность игры $Q(g_n)$ стремится к рискованности игры $Q(g)$. Это вполне очевидное требование, но есть индексы, которые не удовлетворяют этой аксиоме. У них есть свои преимущества, но они не удовлетворяют этому требованию.*

Теперь перейдем к играм с нормальным распределением. Рискованность игры с нормальным распределением равна:

$$R(g) = \frac{\mathrm{Var}[g]}{2E[g]},$$

где Var $[g]$ — дисперсия случайной величины g. Таким образом, здесь мы получаем достаточно красивую формулу.

Сумма двух независимых и одинаково распределенных игр имеет ту же рискованность, что и каждая из игр в отдельности. В более общем случае, если мы берем две независимые игры, не обязательно одинаково распределенные, их сумма будет иметь рискованность большую, чем меньшая из рискованностей, но меньшую, чем большая из них. Отсюда следует интересное наблюдение. Если вы хотите управлять своим портфелем, делая огромное количество независимых инвестиций, то вам не нужно беспокоиться о рискованности всего портфеля, достаточно следить лишь за тем, чтобы каждая инвестиция, которую вы осуществляете, не превышала уровень рискованности, который вы считаете допустимым.

Напоследок отметим, что при желании мы можем уйти от аксиомы об однородности и определить *порядковый эквивалент индекса рискованности* Q. Индекс Q будет порядково эквивалентен R тогда и только тогда, когда он удовлетворяет требованиям аксиом двойственности, стохастического доминирования первого порядка и непрерывности.

---

* Говорят, что игра g стохастически доминирует по второму порядку игру g_*, если g_* может быть получена из g заменой некоторых его значений на случайные величины с тем же математическим ожиданием. Записывается отношение стохастического доминирования первого порядка так: $g(FOD)g_*$. Говорят также, что индекс рискованности Q является монотонным первого (второго) порядка, если $Q(g) < Q(g_*)$, когда $g(FOD)g_*$ (соответственно $g(SOD)g_*$). Таким образом, индекс рискованности $R(g)$ является монотонным в обоих смыслах. — *Прим. ред.*

* Можно дать эквивалентное определение непрерывности: индекс $Q(g)$ непрерывен в g_*, если для любой игры g и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|Q(g_*) - Q(g)| < \varepsilon$ как только $|g_* - g| < \delta$ для каждого своего значения. — *Прим. ред.*

ВОПРОСЫ

Как соотносится ваш индекс с моральным ожиданием Бернулли?

Спасибо, что дали мне возможность рассказать о том, на что у меня не хватило времени.

Помните, мы говорили о постоянной абсолютной несклонности к риску. Есть другая концепция — концепция постоянной относительной несклонности к риску (constant relative risk aversion). Она заключается в том, что индивид имеет постоянную относительную несклонность к риску, если его индекс Эрроу–Пратта обратно пропорционален его благосостоянию, т. е. чем больше его благосостояние, тем меньше он несклонен к риску.

Единственная полезность постоянной относительной несклонности к риску с коэффициентом пропорциональности, равным единице, существует тогда, когда она в точности равна единице, деленной на достаток индивида. Это и есть функция полезности Бернулли, которая является логарифмической. Бернулли утверждал, что люди оценивают деньги не одинаково в зависимости от уровня своего благосостояния — более состоятельный человек меньше ценит каждый добавочный доллар, — и он измерял это с помощью логарифмической функции. Таким образом, идею Бернулли можно использовать для определения постоянной относительной несклонности к риску. Индивид с этой полезностью, выраженной функцией полезности Бернулли, и первоначальным благосостоянием ω принимает игру, если ее выигрыш наверняка превышает рискованность, и отказывается от нее, если выигрыш наверняка будет меньше, чем рискованность. Таким образом, рискованность — это пограничная точка между тем, когда человек собирается принять игру, и тем, когда он собирается ее отклонить. И эта точка рассчитывается на основе логарифмической полезности Бернулли.

Обычно мы используем показатели риска в качестве поддержки процесса принятия решений. Можно ли использовать индекс рискованности в принятии решений, например, в бюджетировании, в распределении капиталовложений и т. п.?

Давайте я расскажу вам историю по этому поводу, а потом отвечу на вопрос. Эта история связана с началом данного исследования и произошла в Университете Брауна в марте 2004 г. Обычно я не читаю газет, но я был в факультетском клубе чужого университета, и там лежали номера *New York Times*. Я взял газету и на первой странице увидел статью, описывающую «манипуляции» с государственным пенсионным фондом государственных служащих США. В ней говорилось, что государственные пенсионные фонды сильно зависят от консультантов, которые предлагают, куда инвестировать их средства. Эти консультанты зачастую оказываются заинтересованными лицами. В статье было сказано, что они осуществляют «слишком рискованные инвестиции». Прочитав это, я пошел в кабинет и спросил у Роберто Серрано: «Что значит «слишком рискованный»? Как это можно измерить?» Ведь речь шла не о каком-то человеке, а о пенсионном фонде! Что значит «слишком рискованный» для фонда? Наш индекс должен был дать ответ на этот вопрос. Теперь законодатель может сказать: «Отлично, можете делать инвестиции, но так, чтобы рискованность не превышала миллион долларов». Как человек решает, на какой риск он готов пойти? На основе своего опыта. Если вы используете индекс рискованности достаточно часто, то понимаете, какой уровень рискованности для вас приемлем. Как вы поймете, что температура в −20 градусов Цельсия слишком холодна для вас? Вы выйдете на улицу однажды, потом еще раз, потом снова и снова. Через какое-то время вы поймете, что такое –15, –25, –10 и что такое –20.

Если теперь вы услышите по радио, что сегодня температура –20 градусов, вам уже не нужно выходить на улицу — вы знаете, сколько это. Или вы можете пойти к профессору Петросяну и предложить некую инвестицию. Он спросит: «Насколько она рискованна? Какой у нее индекс рискованности Ауманна–Серрано?» Вы ему ответите, что индекс такой-то и такой-то. «Нет, это для меня слишком рискованно...» — скажет он, хотя, если вы с ним большие друзья, может и согласится. Поэтому индекс рискованности — это очень полезный инструмент в управлении рисками, анализе рисков и инвестиционном менеджменте.

На самом деле в какой-то момент Серрано предложил мне запатентовать индекс, прежде чем публиковать исследование. Я ответил: «В принципе можно и запатентовать, и я думаю, когда-нибудь мы пожалеем, что не сделали этого, но если мы начнем патентовать, общаться с юристами, патентными служащими и т. д., все наше время уйдет на это и мы перестанем заниматься наукой. Давай просто опубликуем его и все!»

Мне кажется, что должен был получиться действительно полезный инструмент управления рисками.

Управление рисками — сейчас очень популярная тема, которой посвящено множество публикаций, особенно консалтинговых фирм, таких как McKinsey, если не ошибаюсь. Они дают определение риска, которое состоит из трех базовых параметров. Речь идет об источнике риска, объекте риска и воздействии риска. Как рискованность соотносится с этими тремя концептами?

Попробую ответить. Рискованность определена в первую очередь для денежных или азартных игр.

Помните, как мы определили азартную игру? Это случайная величина со значениями, выраженными в денежных единицах. Значит, мы точно знаем, каково распределение: с какой вероятностью вы выиграете 100 тыс. рублей, а с какой — что-нибудь еще. В большинстве инвестиций вероятность вам неизвестна, у вас есть только смутные предположения по поводу того, каковы эти вероятности. Поэтому, для того чтобы применять этот индекс и трансформировать его во что-то, что можно реально использовать на рынке, необходимо подумать о том, как учесть некоторые неизмеримые вещи. Я, честно говоря, не знаю, о каких трех параметрах вы говорите, но они, вероятно, как раз и связаны с этими неизмеримыми вещами. Может быть, и измеримыми, но, во всяком случае, трудно измеримыми. В физике происходит то же самое: можно дать определение температуры, но ее измерение — это совсем другое. Для этого нужен термометр. При определении чего-либо еще далеко до его измерения, но прежде чем измерить, необходимо определить.

В этом польза определения. Да, до практического применения индекса рискованности в управлении рисками необходимо предпринять дополнительные усилия, исследования и разработки, но, по крайней мере, у нас уже есть определение.