

НОВЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Л. В. КАНТОРОВИЧ И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ: СИНТЕЗ РЕАЛЬНОСТИ, МАТЕМАТИКИ И ЭКОНОМИКИ

А. В. БУХВАЛОВ

Высшая школа менеджмента СПбГУ

Применение математических моделей в экономике и менеджменте — чрезвычайно обширная и разноплановая область исследований. Едва ли возможен исчерпывающий и единообразный анализ такого рода применений. Анализ опыта, связанного с развитием и использованием достаточно широкого класса моделей, представляет несомненный интерес. Данная статья приурочена к 100-летию со дня рождения выдающегося российского математика и экономиста Леонида Витальевича Канторовича. В ней мы отталкиваемся от его исследований в области создания модели линейного программирования, ее обобщений и применения, что позволяет обсудить роль нормативных оптимизационных моделей в экономике и менеджменте. Особое внимание уделено нахождению правильного места и подходящей интерпретации модели линейного программирования как модели принятия управленческих решений.

Ключевые слова: Канторович, экономико-математическое моделирование, линейное программирование, менеджмент.

<...> Так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым творцом, то в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума; поэтому нет никакого сомнения, что все явления мира с таким же успехом можно определить из причин конечных при помощи метода максимумов и минимумов. <...>¹

Леонард Эйлер (1744 г.)

Санкт-Петербург и Санкт-Петербургский университет имеют мировую известность как место, где были совершены epochальные открытия в области разработки математических методов экономики и математической теории оптимизации. Слова эпиграфа взяты из работы великого швейцарского, немецкого и российского математика

Настоящая статья основана на работе [Бухвалов, 2010] и на одноименном статье пленарном докладе автора на Международной конференции «Математика, экономика, менеджмент: 100 лет со дня рождения Л. В. Канторовича» (Санкт-Петербург, СПбГУ, 7–9 февраля 2012 г.).

¹ Цитата из работы Л. Эйлера воспроизводится по переводу с латинского в [Эйлер, 1934].

© А. В. Бухвалов, 2012

Леонарда Эйлера, работавшего в Петербурге в 1727–1741 и 1766–1783 гг., с 1731 г. — члена императорской Петербургской академии наук. Эта работа, посвященная изопериметрической задаче, содержит основы вариационного исчисления — одного из основных разделов непрерывной оптимизации. Большинство работ данного направления были инспирированы задачами, возникающими в механике и физике. Однако в тот же период анализ экономических задач в условиях неопределенности привлек братьев Бернулли — Николая и Даниила. Их результат, получивший название «Петербургский парадокс», касался теории выбора в условиях риска.² Естественным продолжением данной традиции решения математиками важнейших задач физики, механики и экономики является вклад выдающегося ленинградского математика Леонида Витальевича Канторовича. Его работы по линейному программированию привели к появлению мощной школы экономико-математических исследований, основанной на идее оптимизации в качестве основной базовой концепции.³

Выдающийся российский математик и экономист Леонид Витальевич Канторович родился 19 января 1912 г. в Санкт-Петербурге.⁴ Большинство его выдающихся достижений в области математики и экономики связано с Ленинградом (С.-Петербургом) и Ленинградским государственным

университетом (ныне — СПбГУ). Его пионерная работа «*Математические методы организации и планирования производства*» (см.: [Канторович, 1939; 20126]) была опубликована издательством ЛГУ. В конце 1950-х гг. именно в Ленинграде Канторович стал инициатором и организатором двух выдающихся инноваций в области экономико-математических исследований и образования. Во-первых, Л. В. Канторович был руководителем Ленинградской группы Лаборатории по применению статистических и математических методов в экономике, которая вместе с ним практически в полном составе переехала в начале 1960-х гг. в новосибирский Академгородок, став основой для мощного экономико-математического направления, представленного в Институте математики СО АН СССР, Новосибирском государственном университете, Институте организации и планирования промышленного производства РАН и др. Во-вторых, в 1959 г. усилиями Л. В. Канторовича при поддержке других видных ученых математико-механического факультета ЛГУ (из которых упомянем С. В. Валландера и Ю. В. Линника) был организован специальный «шестой» курс экономического факультета. Целью его была подготовка принципиально нового поколения экономистов, которые могли бы проводить плановые расчеты и использовать ЭВМ. Это событие напрямую повлияло на становление специализации «экономическая кибернетика» в СССР и появление соответствующей профильной кафедры на экономическом факультете ЛГУ.

Подробно с биографическими материалами о Канторовиче и обзорами его деятельности можно познакомиться в книгах [Канторович, Кутателадзе, Фет, 2002; 2004], а также в [Романовский, 2010]. Влияние Канторовича на становление экономического образования в СССР рассмотрено в [Бухвалов, Дмитриев, 1999; 2009]. Две версии полной библиографии работ Л. В. Канторовича можно найти в [Леонов, Катъкало,

² Перевод исходной статьи 1738 г. с современными комментариями см. в [Бернулли, 1999].

³ Фундаментальной роли идеи оптимизации в экономике и вкладу Канторовича в ее продвижение в СССР был посвящен пленарный доклад В. Л. Макарова на Международной конференции «Математика, экономика, менеджмент: 100 лет со дня рождения Л. В. Канторовича» (Санкт-Петербург, СПбГУ, 7–9 февраля 2012 г.), см. также [Макаров, 2011].

⁴ Согласно официальной записи в паспорте, а также на основе архивных изысканий, проведенных А. А. Бовкало, указывается дата 15 января (ЦГА СПб. Ф. 7240. Оп. 10. Д. 291).

Бухвалов, 2010, с. 529–572; Кутателадзе, 2012].

В связи с проведением Международной конференции «Математика, экономика, менеджмент: 100 лет со дня рождения Л. В. Канторовича» (Санкт-Петербургский государственный университет, 7–9 февраля 2012 г.) было опубликовано собрание избранных работ Л. В. Канторовича по экономике и математике [Канторович, 2012а], осуществлено репринтное издание основополагающего труда «*Математические методы организации и планирования производства*» [Канторович, 2012б], а также исправленное и дополненное издание монографии «*Рациональный раскрой промышленных материалов*» [Канторович, Залгаллер, 2012], с материалами об авторах этой книги и современным обзором литературы по раскрою. В Новосибирске был выпущен том избранных (редких) работ [Канторович, 2011], оригиналы которых опубликованы в 1938–1960 гг. Также к 100-летию со дня рождения Л. В. Канторовича был выпущен специальный выпуск журнала «*Экономика и математические методы*». Целый ряд материалов, посвященных юбилею, появился в № 1 «*Журнала Новой экономической ассоциации*» за 2012 г. Автор этих строк в популярной публикации [Бухвалов, 2012] опять остановился на освещении выдающегося вклада Канторовича в теорию менеджмента.

Л. В. Канторович является автором линейного программирования в двух его ипостасях: как математической теории (хотя формальные математические результаты его интересовали только в связи с экономическими приложениями) и как конкретной, очень красивой модели, тоже носящей имя «линейное программирование», которая включает в себя теорию двойственности, приводящую к «теневым» ценам (объективно обусловленным оценкам Канторовича), критериям эффективности использования ресурсов, пониманию единства производственного плана и цен. Математическая

теория линейного программирования и ее приложения к разнообразным экономическим задачам являются значительно более широкой темой, чем линейное программирование во втором, более узком, смысле.

Целью данной статьи является анализ истории создания и применения модели линейного программирования в узком смысле. Это приведет нас не только к уточнению исторической канвы событий, но и к уточнению специфики данного направления исследований.

1. От реальности — к экономико-математической модели

Л. В. Канторович был прежде всего специалистом по чистой математике. Математические работы, написанные в первое десятилетие его научной активности, посвящены дескриптивной теории множеств, основам функционального анализа (новой тогда дисциплины), аксиоматическому построению теории полуупорядоченных пространств (приоритетом в данной области Л. В. Канторович гордился до конца жизни, хотя реальные исследования в этом направлении он прекратил еще в довоенные годы). Несмотря на всю абстрактность математических теорий, Леонида Витальевича всегда остро интересовала реальность — в первую очередь речь шла об экономической реальности (хотя нельзя не отметить его выдающийся вклад в разработку вычислительных методов для атомного проекта в конце 1940-х гг.).

Из воспоминаний Канторовича известно, что за год до его исторической публикации 1939 г. он обращался в правительство с письмом о неправильностях ценообразования в СССР [Канторович, Кутателадзе, Фет, 2002, с. 51]. Канторовичу в тот раз повезло — его просто пожурили и посоветовали заниматься математикой. Любопытно, что в скором времени Леонид Витальевич стал основателем математических моделей планового ценообразования. Так, он всегда

гордился своим вкладом в разработку новых ценовых тарифов оплаты услуг такси, состоящих из двух компонентов — фиксированной оплаты посадки и платы за пробег. С начала 1970-х гг. он принимал активное участие в работе Междудементственного научного совета по проблемам ценообразования Государственного комитета цен Совета Министров СССР и АН СССР. В одной из своих последних работ [Канторович, Макаров, 1984], посвященной проблематике ценообразования, в частности, анализируется вопрос об использовании экономико-математических моделей для определения ценности нововведений (в современном понимании — инноваций).

В 1939 г. перед Канторовичем встала реальная экономико-математическая проблема, называемая в российской литературе «задача фанерного треста», когда к нему обратились с производственной задачей оперативного управления — о распределении производственных заданий между станками, взаимозаменяемыми технологически, но обладающими разной производительностью. В результате появилась модель оптимизации при наличии ограничений, которая, однако, не решалась с помощью классического метода Лагранжа в силу того, что математически область допустимых решений представляла собой многомерный многогранник (симплекс). Канторовичу удалось получить работающий алгоритм для решения широкого круга родственных задач, формализуемых с помощью математического аппарата, получившего позже в работах американских математиков название «линейное программирование» (ЛП). Именно эта работа и привела его в 1975 г. к заслуженной Нобелевской премии по экономике.

После 1939 г. и в первые годы Великой Отечественной войны Л. В. Канторович продолжал поиски разнообразных приложений идей, связанных с линейным программированием. Среди выдающихся результатов

следует упомянуть решение (совместно со своим студентом М. К. Гавуриным) транспортной задачи. Были получены также разнообразные экономические приложения на макро- и микроуровнях. К сожалению, по не зависящим от него обстоятельствам Канторовичу пришлось прекратить исследования в области экономики практически до 1958 г., когда он возглавил группу молодых ленинградских математиков, призванных стать работниками экономико-математического отдела будущего Института математики СО РАН и готовящихся переехать в новосибирский Академгородок. Через год появилась монография [Канторович, 1959], в значительной степени подготовленная в военные годы в Ярославле. Ниже мы остановимся на понимании и учете Л. В. Канторовичем дополнительных соображений, не математической и не модельной природы, предложенных в [Канторович, 1959].

Еще одним направлением работ, отталкивающихся от производственной реальности, был круг исследований, которые он проводил со своим учеником В. А. Залгаллером⁵ в области оптимального раскроя промышленных материалов [Канторович, Залгаллер, 1971; 2012]. Эта проблематика относилась к весьма общей по постановке и приложениям инженерно-экономической задаче раскроя различных материалов (проката, кожи, ткани и др.) в различных отраслях промышленности (машиностроении, обувной и швейной промышленности; наиболее интенсивно осуществлялось внедрение в лесной промышленности Карелии). Математическая постановка задачи охватывала такие случаи, как раскрой рулонных материалов (например, ткани или фольги для трансформаторов), распил бревен на доски, раскрой листового проката и др. В данной области использовались

⁵ Любопытно отметить, что активно занимавшийся прикладными аспектами распила бревен В. А. Залгаллер был чистым математиком — выдающимся геометром.

обобщенные алгоритмы линейного программирования, которые привели, в частности, к таким математическим открытиям, как метод ветвей и границ и метод генерации столбцов (оба метода позже были независимо переоткрыты американскими математиками).

В начале 1960-х гг. реальность потребовала создания оптимизационных и балансовых моделей сложных экономических систем, пригодных для проведения расчетов на ЭВМ, осуществлявшихся Госпланом СССР. Здесь Л. В. Канторович оказал большое влияние на выдающегося советского экономиста А. Г. Аганбегяна, а также на всю систему стыковочных расчетов между экономическими регионами Сибири.

Социально-экономические системы СССР и развитых капиталистических стран (например, США) выглядели по-разному. В 1973 г. вышла в свет эпохальная работа Д. Белла *«Грядущее постиндустриальное общество»*. Идея концепции постиндустриализма заключалась в преобладании темпов роста в сфере услуг по сравнению со сферой материального производства, что обеспечивается научно-техническим и в первую очередь научно-информационным прогрессом. В экономике СССР в этот период никакого преобладания роста в сфере услуг не было. Более того, по-прежнему постулировался принцип преобладания производства средств производства. Тем не менее соревнование между системами в области вооружений породило ЭВМ, а вместе с ними и информационно-технический прогресс. Соответственно, независимо от системы стала очевидна роль научно-технического прогресса, в СССР появился Государственный комитет по науке и технике. С 1971 г. и до конца жизни Л. В. Канторович был членом этого комитета. В 1974 г., всего на год позже книги Белла, появилась работа [Канторович, 1974], в которой анализировались вопросы ускорения НТП в СССР.

2. Леонид Витальевич Канторович: экономист или менеджер?

Л. В. Канторович был одновременно ученым-концептуалистом и ученым-универсалом, чей вклад существенно изменил лицо ряда фундаментальных дисциплин. В данной публикации мы продолжаем (см.: [Бухвалов, 2003]) исследование вопроса о Канторовиче как теоретике менеджмента. Тема эта более узкая, чем Канторович-экономист. Поэтому мы не будем касаться острых баталий начала 1960-х гг. (эпохальных для российской экономической теории!), когда традиционные представители политэкономии социализма громили Л. В. Канторовича как интуитивного неоклассика (употребляется слово «интуитивного», так как Канторович в момент создания своей теории, по-видимому, не имел доступа к работам неоклассиков, тогда как третий том *«Капитала»* Маркса, посвященный экономической ренте, он основательно проштудировал). Такой подход позволяет непосредственно рассмотреть позитивный вклад Леонида Витальевича в конкретную экономику и управление.

Обычно интерес Канторовича к экономическим (точнее, в данном случае управленческим) вопросам связывают с «задачей для фанерного треста» — типичной задачей выбора оптимального (по критерию выручки) оперативного плана использования имеющегося универсального оборудования с выполнением ассортиментного задания (каждый из видов продукции мог производиться на любом из станков, но с разной производительностью; под ассортиментным заданием Канторович понимал то, что различные виды продукции производятся в определенном соотношении, — он считал это очень важной практической особенностью своей математической модели). Это привело в 1939 г. к новаторской формулировке задачи линейного программирования. Ответ давался в терминах интенсивности использования каждого фактора

(в данном случае станка). Именно за это открытие ему совместно с американским экономистом Тьяллингом Купмансом в 1975 г. была присуждена Нобелевская премия по экономике — «За вклад в теорию оптимального распределения ресурсов». Кстати, заметим, что, когда теория Канторовича стала с большим опозданием известна на Западе, перевод брошюры 1939 г. был опубликован именно в управленческом журнале — *Management Science*. Главная монография Канторовича была переведена на английский язык в 1965 г. [Kantorovich, 1965], что, безусловно, способствовало последующему присуждению ему Нобелевской премии. Отметим также дающий хорошее представление о работах Канторовича по экономическим приложениям оптимизации сборник, изданный вскоре после присуждения Нобелевской премии [Kantorovich, 1977].

Мы не будем здесь касаться собственно истории появления ЛП и приоритетных вопросов, хорошо представленных в [Канторович, Кутателадзе, Фет, 2002] и [Леонид Витальевич Канторович., 2009] (см. также: [Lenstra, Rinnooy Kan, Shrijver, 1991]).

Производственный план и ценообразование на факторы производства⁶ стали центральной темой исследований Канторовича.

Работы Канторовича всегда носили конкретный управленческий характер. Он никогда не ограничивался формальными математическими и численными результатами. Для тех, кто не читал или забыл о Канторовиче, предлагаю не только теоретические, но и неформальные практические рекомендации, приведем несколько цитат из [Канторович, 1959, с. 150–151]:

Следует сказать, что иногда у нас рекомендуют любые мероприятия, дающие

⁶ Канторович, следуя терминологии того времени, назвал их ресурсами, а задача об их оптимальном распределении получила название «ресурсная».

экономии дефицитного материала, без всякого расчета и ограничений даже тогда, когда экономятся крохи за счет значительных затрат труда и уменьшения выпуска продукции. Практическое решение подобных вопросов в значительной мере определяется не общей ситуацией, а капризами снабжения данного предприятия. <... > Прежде всего вследствие недостатков в оценке результатов рационализаторских предложений (недоучет ряда факторов при обычном расчете себестоимости — по калькуляции) значительную экономию дает большое число предложений, использование которых в данных условиях нецелесообразно. В результате среди них теряются... предложения, которые могут дать действительную... экономию (далеко не всегда совпадающую с экономией по калькуляции).

Для разрешения дилеммы «экономист или менеджер» необходимо опираться на определенную методологию. Идеи математической оптимизации универсальны. Они используются при построении и анализе как позитивных, так и нормативных моделей. В экономическом мейнстриме до сего дня принят подход, называемый «позитивной экономикой». Сам термин был введен британским экономистом Дж. Н. Кейнсом (отцом Дж. М. Кейнса) в 1891 г. Современное методологическое оснащение концепции было создано в знаменитом методологическом эссе М. Фридмана [Friedman, 1953], а затем закреплено в широких преподавательских кругах чрезвычайно популярным и многократно переиздававшимся вводным учебником Р. Липси [Lipsey, 1963]. Позитивные, т. е. дескриптивные, или описательные, модели рассматривались как основной класс экономических моделей, призванный описывать реальную экономику так, как, скажем, физика или химия описывает реальный мир. Нормативные модели однозначно рассматривались как субъективные модели, зачастую с доминированием политической тенденции. Такого рода характеристика, очевидным образом, по определению принижала

роль нормативных моделей. Тот факт, что нормативные модели несут в себе определенные компоненты дескриптивных моделей, всегда отмечался в качестве некоего оправдания существования первых. Модели оптимизации входят в позитивный мейнстрим в рамках концепции рациональности поведения. Даже не останавливаясь на современной критике безусловного требования концепции рациональности, отметим, что со стороны спроса мейнстрим оптимизирует в соответствии с действительно существующим рациональным поведением едва ли реально существующую функцию полезности. В случае же теории фирмы оптимизируются реально существующие целевые функции (прибыль или затраты), но интересно знать, кто при этом является субъектом рационального поведения фирмы.

Отметим, что ведущие советские специалисты по ЭММ правильно понимали соотношение между нормативным и дескриптивным не с идеологических, а с содержательных позиций. Цитируем в связи с этим учебник по математическому моделированию А. Г. Гранберга [Гранберг, 1988, с. 26, 27, 29]:

В экономике <...> принцип «практика — критерий истины» в большей степени применим к простым *дескриптивным* моделям, используемым для пассивного описания и объяснения действительности (анализа прошлого развития, краткосрочного прогнозирования неуправляемых экономических процессов и т. п.). <...> Распространенный тип математических моделей <...> — это модели управляемых и регулируемых экономических процессов. <...> Такие модели называются *нормативными*. Если ориентировать нормативные модели только на подтверждение действительности, то они не смогут служить инструментом решения качественно новых социально-экономических задач.

Дескриптивные модели отвечают на вопрос: как это происходит? или как это вероятнее всего может дальше развиваться?

— т. е. они только объясняют наблюдаемые факты или дают вероятностный прогноз. Нормативные модели отвечают на вопрос: как это должно быть? — т. е. предполагают целенаправленную деятельность. <...> Типичным примером нормативных моделей являются модели оптимального планирования, формализующие тем или иным способом цели экономического развития, возможности и средства их достижения.

Гранберг останавливается и на важнейшем вопросе верификации нормативных моделей экономики — это та позиция, которая регулярно подвергается атакам со стороны позитивистов (см.: [Моисеев, 1979]). А именно автор утверждает, что верификация состоит в том, что каждая нормативная модель конкурирует с другими, уже нашедшими практическое применение методами планирования и управления. При этом, конечно, невозможно поставить чистый эксперимент по верификации, устраняющий влияние других воздействий на моделируемый объект.

Как уже было отмечено, оптимизационные модели относятся к числу нормативных. Тем самым это модели управления. Канторович начал с фанерного треста, планирования перевозок, рационального раскроя материалов. Все это — нормативные оптимизационные модели, относящиеся к управлению (менеджменту) отдельной компанией или группой компаний. По существу, именно уровню моделирования отдельных хозяйствующих субъектов посвящена основная монография [Канторович, 1959]. В этом его огромный вклад в теорию управления. Методологические положения из книги Гранберга давно и хорошо известны всем тем, кто занимается теорией и практикой управления во всех странах. Исследования операций (*operations research*), часто называемые на английском языке термином “*management science*” (что неудачно переводится на русский язык как «научный менеджмент», правильный перевод — «наука о менеджменте»), являются

на самом деле *искусством* поддержки управленческих решений с помощью математического моделирования. Безусловно, отсылка к «искусству» указывает на субъективность и креативность предмета.

В современных учебниках по конкретным аспектам управления безусловно разделяется сформулированная выше точка зрения о нормативных и дескриптивных моделях, с указанием на взаимодействие между этими моделями. При этом, как правило, дескриптивные модели (например, спроса) служат источником получения данных для нормативных, в том числе оптимизационных, моделей (см., напр.: [Shapiro, 2007, p.10–11, fig. 1.3]).

Кстати, методологическое обсуждение взаимосвязи позитивных и нормативных моделей указывает на существенный пробел в традиционных отечественных исследованиях по ЛП, включая и работы самого Л. В. Канторовича, в которых ничего не говорится об источниках данных для расчетов по модели линейного программирования (откуда берутся коэффициенты целевой функции, коэффициенты матрицы ограничений, вектор правых частей системы ограничений). Не исключено, что Канторович не уделил достаточного внимания этому вопросу, потому что считал, что, скажем, коэффициенты матрицы ограничений должны быть заданы нормативным образом. Напомним, что смысл коэффициента матрицы заключается в том, что он показывает, какое количество ресурса (фактора) надо использовать для получения одной единицы продукта. Безусловно, эта величина является специфической для каждого предприятия (зависит от технологии, организации и квалификации персонала). Такого рода величину невозможно вычислить теоретически, а потому использование дескриптивной модели множественной линейной регрессии, построенной на исторических данных, связанных с рассматриваемым предприятием, представляется основным работающим подходом. Кстати,

на конкретных предприятиях это могло оказаться тормозом для применения моделей оптимизации, причем по двум разным причинам. Во-первых, в плановой экономике могли быть плановые нормативы, которые нельзя было изменять в практике планирования (а план, основанный на нереалистичных для данного предприятия нормативах, оказывался и невыполнимым, и неоптимальным). Во-вторых, если бюрократического давления не было, все равно требовалась большая работа по сбору и обработке статистических данных. Такого рода модельные задачи решались в некоторых крупных научно-производственных объединениях на базе специально создаваемых научно-управленческих лабораторий.

Казалось бы, что в рамках создания автоматизированных систем управления предприятием (АСУП) подобного рода проблемы должны были быть разрешены. И как показывают многочисленные выступления Канторовича на многочисленных конференциях, посвященных АСУП, он на это надеялся. Тем не менее этого не происходило. Так, на одной из конференций он отмечал: «В автоматизированных системах управления, оснащенных современной вычислительной техникой, оптимизационные задачи составляют не более 5–8%, и то далеко не все они внедрены» [Канторович, 1980].⁷

Не исключено, что трудности внедрения на уровне фирмы, наряду, конечно, и с большей престижностью, заставили Канторовича начиная с середины 1960-х гг. все больше и больше концентрировать свое внимание на проблемах народно-хозяйственного планирования. Это уже чисто экономическая сфера деятельности, не относящаяся к менеджменту.

⁷ Сейчас АСУП плавно перетекли в КИС (корпоративные информационные системы), но в российских условиях мало что изменилось. Внедрение каких-либо моделей принятия решений, включая ЛП, в производственное и инвестиционное планирование до сих пор является редкостью.

3. За что была присуждена Нобелевская премия по экономике 1975 года?

Прежде чем рассмотреть содержательный вопрос о том, за что была присуждена Нобелевская премия по экономике 1975 г., попытаемся понять, почему она была присуждена советскому экономисту-математику. Советская экономическая наука не пользовалась большим вниманием на Западе, отчасти в силу ее невысокого уровня, а отчасти из-за отсутствия интереса к специфическим проблемам плановой экономики, которые небезуспешно решались прежде всего в рамках экономико-математического моделирования. Для того чтобы заслужить внимание мировой экономической общественности, а тогда и Нобелевского комитета, необходимо было сделать что-то, что содержит не только новые концепции и приоритетную новизну, но и содержательно интересно исследователям рыночной экономики. Очень многие постановки, интересовавшие советских экономистов, не имели прямого аналога в рыночной экономике. Например, обсуждение вопроса о народно-хозяйственном оптимуме при социализме, безусловно, не имело интерпретации в рамках рыночной экономики, хотя и было актуальной задачей для экономики плановой. То же в значительной мере касается моделирования систем согласования в иерархических системах принятия решений, включающего, в частности, такие интересные концепции, как теория активных систем [Бурков, 1977] (предполагающая оптимальные действия центра с учетом искажения решений на нижних уровнях иерархии), программно-целевое планирование и управление (см., напр.: [Поспелов, Ириков, 1976]). Отметим, что первая теория переключается с современными исследованиями (см.: [Саати, 2011]), а вторая концепция является более широкой и инструментальной, чем разрекламированная позже сбалансированная

система показателей Каплана и Нортон (см., напр.: [Каплан, Нортон, 2004]).

Канторовичу повезло — его работы оказались на острие тех исследований, которые параллельно проводили ведущие американские экономисты, в целом ряде случаев опережая их по научному приоритету. Задача фанерного треста, функционирующего в плановой экономике, оказалась эквивалентной задаче фирмы, являющейся совершенным конкурентом, в рыночной экономике. В обоих случаях мы можем считать, что цены на продукцию фиксированы (и известны). Проистекает это из абсолютно противоположных соображений. В плановой экономике цены назначает и не очень часто пересматривает центральный планирующий орган. В случае совершенного конкурентного рынка цены назначает его «невидимая рука» исходя из модели равновесия.

Микроэкономическая теория фирмы позволяла решить эту задачу в чрезвычайно абстрактном виде. При весьма общих предположениях о модели фирмы ответ давался в терминах «теневых» цен, вычисляемых как частные производные. До конкретного управленческого решения такого рода экономика не может быть доведена. В случае задачи линейного программирования требуется математический аппарат, отличающийся от частных производных, но зато приводящий к конкретным значениям «теневых» цен. При этом возможен анализ чувствительности «теневых» цен к исходным данным, позволяющий понять, можно ли по-прежнему использовать найденную систему «теневых» цен для анализа эффективности поведения фирмы при изменившихся условиях.

Одним из часто обсуждаемых является вопрос о том, была эта премия присуждена за открытие линейного программирования или за что-то иное. В первом случае, как многие считали, среди номинантов должно было быть имя Джорджа Данцига, американского математика — изобретателя

линейного программирования в США и автора симплекс-метода.

По-видимому, любое объективное суждение на эту тему должно отталкиваться от пресс-релиза Шведской королевской академии наук с официальной формулировкой научного вклада номинантов — профессора Леонида Канторовича (СССР) и профессора Тьяллинга Купманса (США). Краткая формулировка заключается в следующем:

«За вклад в теорию оптимального распределения ресурсов».

Пресс-релиз состоит из пяти следующих коротких абзацев⁸, которые мы приведем и прокомментируем.

Оптимальное распределение ресурсов

Леонид Канторович и Тьяллинг Купманс оба внесли наиболее важный научный вклад в область нормативной экономической теории, а именно теории оптимального распределения ресурсов. В качестве отправной точки своих работ в этой области оба ученых изучали проблему, фундаментальную для исследования экономической деятельности в целом: как доступные производственные ресурсы могут быть самым лучшим образом использованы для производства товаров и услуг. Эта область включает такие вопросы, как: какие товары должны быть произведены, какие производственные способы должны быть использованы и сколько произведенной продукции должно быть потреблено, а также сколько должно быть зарезервировано, для того чтобы создать новые ресурсы для будущего производства и потребления.

Улучшение экономического планирования

Оба ученых достигли чрезвычайно значительных результатов — им удалось сформулировать задачи и описать взаимосвязь между результатами производства и факторами производства с помощью новых подходов. В своей ранней

работе профессор Канторович применил аналитическую технику линейного программирования, для того чтобы продемонстрировать, как улучшить экономическое планирование в его стране. В свою очередь профессор Купманс показал, к примеру, что, пользуясь определенным критерием эффективности, можно непосредственно сделать важные умозаключения по поводу оптимальной системы цен.

Ведущий советский экономист

Профессор Канторович является сегодня ведущим представителем математической школы в советских экономических исследованиях. Его первый вклад в области исследований по экономике был сделан в 1939 г., когда он написал эссе по поводу содержания и важности эффективного использования ресурсов на отдельных предприятиях. В ряде публикаций, одной из которых является его книга *«Экономический расчет наилучшего использования ресурсов»*, профессор Канторович проанализировал аналогичные условия эффективности для экономики в целом, при этом в частности продемонстрировал взаимосвязь между распределением ресурсов и системой цен — как в определенный момент времени, так и в растущей экономике. Важный элемент его анализа заключался в том, чтобы показать, что возможность децентрализованных решений в плановой экономике зависит от существования рациональной системы цен, включая единую расчетную ставку процента как основу для принятия инвестиционных решений.

Анализ деятельности

Профессор Купманс имеет ряд работ, прежде всего *«Анализ производства как эффективная комбинация видов деятельности»*, в которых предлагается так называемый анализ деятельности (activity analysis). В рамках этой теории представлен новый подход к интерпретации соотношения между входными и выходными параметрами производственного процесса, позволяющий прояснить связь между эффективностью в производстве и существованием системы расчетных цен. Это пролило новый свет на взаимосвязь между нормативной теорией рас-

⁸ Перевод автора по официальному источнику: http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1975/press.html

пределения и теорией общего равновесия. В 1960-х гг. профессор Купманс работал над проблемой нахождения критерия оптимальной скорости роста экономики. В этих исследованиях он уделил много внимания изучению факторов, которые в фундаментальном смысле определяют ценность потребления для индивидов и общества в различные моменты времени, — речь шла о росте населения и технологическом развитии. В дополнение к своим достижениям в области распределения ресурсов профессор Купманс является автором выдающихся работ в области методов эконометрики.

В целом два профессора, Леонид Канторович и Тьяллинг Купманс, в основном независимо друг от друга, обновили, обобщили и развили новые методы анализа классической проблемы теоретической экономики — проблемы эффективного распределения дефицитных ресурсов.

К этой информации надо добавить нобелевские лекции самих лауреатов.⁹ Они были очень разными. Канторович не стал останавливаться на технических или популяризационных моментах. Его лекция в основном посвящена упоминаниям о направлениях внедрения экономико-математических методов в СССР на макроуровне. Дважды упоминается имя Данцига (в связи с симплекс-методом и методом декомпозиции Данцига — Вульфа¹⁰). Лекция

⁹ См.: http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1975/kantorovich-lecture.html и http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1975/koopmans-lecture.pdf. Эти лекции неоднократно воспроизводились в печати (см., напр.: [Канторович, Кутателадзе, Фет, 2002, с. 499–508]; англоязычная версия лекции Канторовича была опубликована в 1989 г. в *American Economic Review*).

¹⁰ С методом Данцига — Вульфа — вычислительной процедурой, заметно сокращающей вычисления при решении задачи ЛП с блочной структурой матрицы ограничений, — в СССР были связаны значительные ожидания по внедрению ЛП в макроэкономическое планирование. Теоретически отраслевая структура экономики придавала матрице блочный вид. Этой надежде

Купманса значительно более обстоятельна. Первая ее часть является историческим обзором, в существенной степени посвященным роли Канторовича в теории оптимизации и линейном программировании. Проводит Купманс и параллель с экономистами-социалистами — Бароне, Ланге и Лернером, которые, конечно, не могли оказать никакого влияния на Канторовича в силу изолированности СССР от западного мира. Остановимся на том, как формализовал Купманс пионерный вклад Канторовича. Он отмечает, что уже в работе [Канторович, 1939] имелись семь следующих компонентов:

- 1) *модель производства* описывается конечным набором различных производственных процессов, характеризующихся постоянным отношением между затратами и результатом для каждого такого процесса. Это линейность постановки задачи;
- 2) представление о широком спектре практических *приложений* модели в различных отраслях;
- 3) доказательство того, что независимо от того, решаем мы задачу максимизации выпуска или минимизации затрат, каждый из ресурсов получает численную оценку, которая называется в западной литературе *теневой ценой*;
- 4) выявление того, что *теорема отделимости* Минковского является математическим базисом доказательства существования двойственных переменных (Купманс отмечает, что фон Нейман использовал для этой цели значительно более тяжеловесный аппарат теоремы о неподвижной точке; применимость же теоремы отделимости была показана Гейлом лишь в 1956 г.);

не удалось реализоваться, быть может, в связи с тем, что реально планирование спускалось на уровень министерств, которые вовсе не соответствовали производственным отраслям, — многие отрасли были размыты по десятку министерств, после чего следов блоков уже не найти.

- 5) *вычисление* оптимальных значений прямой задачи и двойственных переменных (напомним, что формализма двойственной задачи у Канторовича не было) для иллюстративных примеров и указание на то, как это делать в более сложных случаях;
- 6) интерпретация двойственных переменных как *норм замены* между различными ресурсами и/или требуемыми продуктами;
- 7) дополнительная интерпретация двойственных переменных как ориентира для координации *решений по распределению*, сделанных в различных департаментах или организациях.

Далее Купманс останавливается на пересказе содержания брошюры [Канторович, 1939], своих совместных работах с Корнаи по двухуровневой системе планирования и более поздних работах по макроэкономической теории роста. Мы же вернемся к (1)—(7). Купманс однозначно дает понять, что:

- а) вся «экономика» ЛПП содержалась в работе 1939 г.;
- б) элегантные идеи математического доказательства существования двойственных переменных — основного экономического инструмента — имелись у Канторовича в 1939 г., где он, как блестящий специалист по функциональному анализу, опередил американских коллег на 15 лет;
- в) вычислительный алгоритм Канторовича носил эвристический характер — здесь заслуга Данцига, но это вычислительная математика.

Подчеркнем еще и то, что в лекции Купманс полностью игнорирует пристрастия самого Канторовича к макроэкономическому планированию, всюду ведя речь о модели предприятия с конечным набором производственных процессов. Эти процессы тоже являются видами деятельности (*activities*), по Купмансу, но его понимание данного термина носит значительно более

широкий экономический характер и не может быть сведено к способам производства изделия на заводе. По существу, речь идет об операционном менеджменте. Это, кстати, единственная экономическая/управленческая дисциплина, в учебниках по которой до сих пор сохранилась заметная часть материала, связанная с ЛПП и транспортной задачей.

Отметим еще и то, что Нобелевский комитет правильно подчеркнул нормативный характер модели Канторовича. Модели нормативного плана чужды неоклассической экономической теории — там царят равновесные (позитивные) модели. Вместе с тем нормативные модели широко распространены в науке о менеджменте. Это адекватно локальной практике принятия решений в компаниях и наличию ограничений, которые могут быть обойдены теоретически в экономическом рассуждении, но не в практике, а тогда и не в теории, менеджмента.

В результате мы получили полную поддержку нашему исходному тезису: «Канторович прежде всего теоретик именно менеджмента, а не экономики». Однако в пресс-релизе мы найдем и темы, лишь вскользь упомянутые Купмансом, так как они относятся к экономике. Обратимся лишь к одному подобному вопросу.

В работе [Канторович, 1959]¹¹ продвигалась идея о единой народнохозяйственной норме эффективности капиталовложений (см. раздел «*Ведущий советский экономист*» в пресс-релизе) — без дифференциации по отраслям, не говоря уже о предприятиях. Это было следствием оптимизационного подхода, где в динамической оптимизационной модели максимизировался объем выпуска заданной номенклатуры продукции в конечном периоде (более последовательно это прослеживается в ра-

¹¹ Значительно более продвинутый анализ нахождения численной оценки нормы дисконтирования был проведен в работе [Канторович, Макаров, 1965].

ботах видного советского специалиста по оптимизации А. Л. Лурье). В задаче не использовались идеи согласования спроса и предложения по объемам и/или номенклатуре — все основывалось на начальной экспертной оценке потребления (плане)¹². Сама методика расчета эффективности полностью опиралась на идею дефицитности, которая в условиях планового хозяйства не носила экономического характера редкости, а просто отражала неповоротливость командных механизмов «экономики дефицита». Такой подход подвергся справедливой критике в работах известного советского специалиста по инвестициям В. Н. Богачева [Богачев, 1975, с. 92–95].

4. Л. В. Канторович и неоклассическая теория фирмы

Неоклассическая экономика, в основе которой лежит предельный (маржиналистский) анализ, в своем традиционном представлении допускает неявную неоднозначность интерпретации, а именно равновесный анализ, создававшийся Л. Вальрасом для капиталистической экономики с мобильностью факторов и интересов, отсутствием регулирования цен, был вскоре логически почти безупречно применен к анализу плановой экономики с регулированием цен и отсутствием мобильности большинства факторов (итальянец Бароне в 1908 г., затем Ланге, Лернер и Тейлор в США в 1930-е гг.; подробнее см.: [Гальперин, Игнатъев, Моргунов, 1997, прил. 15Б]). Авторы этого второго подхода, в противоположность многим неоклассикам, усматривали достоинства в плановой экономике, которая на-

ходит оптимальное распределение ресурсов в теории, а затем имеет возможность через плановый механизм реализовать оптимум на практике. И первые, и вторые оперировали предельными величинами, выражаемыми модельно как частные производные. Невозможность довести до конкретного числа вычисление этих частных производных, а тогда и равновесного состояния экономики, мало беспокоила первых — их модели носили качественный характер. Они были удовлетворены, если знали знак производной, который означал возрастание или убывание экономической величины при увеличении значения фактора. Для вторых этого было недостаточно. Они хотели вычислить и реализовать народнохозяйственный оптимум. Теперь мы знаем, что это в принципе невозможно в силу неопределенности действий и реакций, которая обязательно имеет место в любой социально активной системе. Однако в рамках линейной модели со всеми ее содержательными упрощениями можно вычислить конкретные значения частных производных. Именно такую возможность и предоставляет линейное программирование Канторовича. Приведем цитату из учебника [Koutsoyiannis, 1979, p. 414], демонстрирующую правильное понимание вклада Л. В. Канторовича в микроэкономику:

Линейное программирование представляет собой недавно разработанную технику, которая позволяет дать численные решения тем задачам, которые ранее могли быть решены только в весьма общих качественных терминах на основе аппарата общей теории фирмы. Таким образом, линейное программирование помогло перекинуть мост между абстрактной экономической теорией и принятием управленческих решений на практике.

Канторович глубоко верил в важность внедрения ЛП в практику плановых расчетов всех уровней. После того как в начале 1960-х гг. его «пустили в экономику»,

¹² См.: [Канторович, 1959, гл. III]. Отметим, что для краткосрочных вложений допускались дифференцированные нормы эффективности, но эта дифференцированность была связана исключительно с временным дефицитом факторов — данный вопрос в рыночной экономике решается кредитом и неограниченной торговлей, но ни того ни другого в СССР не было.

он активно сотрудничал с органами Госплана и Госкомцен, пытался влиять на идеологию создания входящих в 1970-е гг. в моду автоматизированных систем управления предприятием. Реальный выход всех его практических усилий был, к сожалению, невелик.¹³ Наряду с трактовкой ЛП как универсального метода планирования и ценообразования, Л. В. Канторович творчески изучал математическое моделирование как аппарат, заменяющий в плановой экономике реальные рыночные инструменты. В своей нобелевской речи, подводящей в определенном смысле итоги его работ в области экономики, Леонид Витальевич охарактеризовал исходную точку своего подхода следующим образом [Канторович, Кутателадзе, Фет, 2002, с. 500]:

В экономике капиталистического хозяйства <...> наблюдаются в их статике и динамике такие важные экономические показатели, как цены, рента, арендные платежи, процент на капитал. <...> В условиях последовательного планирования хозяйства также выявилась необходимость использования показателей... Возникла проблема их расчета... Они не могли быть получены эмпирическим путем.

Канторович искренне считал корректным подход, когда не математическая модель отражает действительность, а действительности предлагается жить по правилам математической модели. На самом деле

¹³ В 1990 г. автору этих строк посчастливилось общаться в Кембридже с другим Нобелевским лауреатом Ричардом Стоуном, внесшим значительный вклад в теорию национальных счетов и активно использовавшим математические методы (Стоун и Канторович были знакомы и доброжелательно относились друг к другу; имя Канторовича и после его смерти открыло автору двери дома Стоуна). На вопрос о том, удалось ли ему оказать влияние на практику управления британской экономики, Стоун сначала упомянул, что он входил в некоторые правительственные комитеты, но особого внедрения не было, и, подумав, добавил: «Я — исследователь».

рыночный механизм невозможно имитировать — имеется в виду не математическое имитационное моделирование, а рыночная мотивированность экономических агентов, вызванная искусственными стимулами (см. об этом [Гальперин, Игнатъев, Моргунов, 1996, с. 97], где приведено также мнение Ф. Хайека).

5. История линейного программирования

Безусловно, ЛП является основным пробойным результатом Канторовича в экономике и управлении. Модель ЛП вызвала значительный прогресс как в поисках эффективных алгоритмов для численного решения, так и в теоретических концепциях, включая теорию сложности. С каждым ресурсом (фактором), который считался ограниченным в контексте данной задачи, Канторович связал математическую величину, которую он стал называть «объективно обусловленной оценкой», или о.о.о. (филологический выверт, придуманный во избежание обвинений многочисленных противников в субъективности этих оценок). Основная часть ресурсов была представлена факторами производства, имевшими свои цены (рыночные или плановые). Для таких ресурсов о.о.о. являются неоклассическими теневыми ценами. Как известно, теневые цены совпадают с рыночными только в состоянии общего экономического равновесия — состоянии абсолютно нежизненном. Канторович, однако, верил, что в плановой экономике его можно математически «спроектировать». Канторович дал глубокий анализ применения о.о.о. на предприятии. По существу, он предлагал использовать их как внутренние хозрасчетные цены, позволяющие оценить эффективность работы отдельных подразделений. В применениях ЛП на Западе в аналогичной ситуации говорили о трансфертных ценах. Такого рода цены до сих пор используются в крупных холдинговых

структурах (особенно вертикально интегрированных).

Задача ЛП, о.о.о. (называемые сегодня двойственными переменными), теоремы двойственности по-прежнему являются живым математическим аппаратом, включаемым в стандартные западные учебники *производственного и операционного менеджмента* (см., напр.: [Чейз, Эквилайн, Якобс, 2001, гл. 7; Render, Stair, 2000, ch. 7–11]). Линейное программирование и более общие оптимизационные модели широко применяются как в стратегическом, так и оперативном управлении цепями поставок (см., напр.: [Shapiro, 2007]).

Наряду с традиционными производственными факторами, Канторович рассматривал и такой фактор, как земля, что привело его к подходу, предлагающему исчислять экономическую ренту как о.о.о. (в соответствии с качеством земли). Этот подход естественно распространяется на другие природные ресурсы. Данная идея оказала и продолжает оказывать большое влияние на советских и российских экономистов. Отметим, что здесь речь идет о так называемой рикардианской ренте, связанной с редкостью (Канторович писал — дефицитностью), но не уникальностью (в случае уникальности и трудной имитируемости ресурса говорят о шумпетерианской ренте, играющей центральную роль в современной стратегической теории фирмы).

Все интересующие его задачи управления предприятием Канторович [Канторович, 1959, с. 18] делит на два класса: ресурсную задачу — максимизировать выручку за счет определения производственной программы при ограничениях на ресурсы и известных нормативах использования ресурсов в расчете на единицу продукции и задачу о распределении производственной программы — максимизировать количество ассортиментных наборов продукции (ассортиментные наборы заданы) за счет распределения производственных заданий между различными про-

изводственными единицами, имеющими заданную производительность.

Смысл указанной задачи в экономике централизованного планирования ясен. Цены на продукцию известны, поэтому они позволяют определить выручку (впрочем, также будет и для предприятия, являющегося совершенным конкурентом в рыночной экономике). В ресурсной задаче разрешается варьировать количество выпускаемой продукции, что не совсем соответствует духу плановой экономики, но если ввести ограничения на выпуск продукции, то задача становится вполне обычной. Объемы ресурсов предполагаются фиксированными, что естественно для плановой экономики, но странно для рыночной. В задаче о распределении производственной программы ассортимент уже задан (что типично для плановой экономики). Производственный план определяет и потребные ресурсы, что не всегда возможно реализовать в плановой экономике. Если бы все, что придумал Канторович, сводилось только к численным методам решения указанных задач, то и это было бы немало. Такого рода задачи могут интерпретироваться в рамках рыночной экономики и использоваться в производственном и операционном менеджменте.

Для того чтобы разобраться в этом, вспомним основы неоклассической теории фирмы. Фирма может рассматриваться либо в мгновенном (ничего не изменить), либо в коротком (можно изменить все, кроме размера завода), либо в длительном (можно изменить все, в частности увеличить мощности) периоде. В ресурсной задаче Канторович рассматривает типично менеджерскую ситуацию, находящуюся между мгновенным и коротким периодами: факторы уже закуплены (если их не используем, то — безвозвратные потери; возможность продажи не учитывается, что во многих случаях соответствует реальности), но объемы производства и ассортимент еще не определены (причем в возможных ас-

сортиментах используется производственная гибкость). Именно последние и определяют решение задачи ЛП. Ресурсы, которые мы используем не полностью при оптимальном плане производства, называются недефицитными. Им Канторович присваивает о.о.о., равную нулю. Остальные ресурсы являются дефицитными — их о.о.о., как правило, больше нуля. Величина о.о.о. также вычисляется в ходе математического решения задачи ЛП. На самом деле о.о.о. являются предельными оценками ресурсов, которые в рамках теории ЛП часто называют теневыми ценами. Каждое предприятие имеет индивидуальные теневые цены на ресурсы, но Канторович верил в существование общего экономического равновесия, а значит, и в выравнивание теневых цен за счет приближения их к равновесным (рыночным). Интерес модели ЛП, в частности, заключается в том, что предельные величины можно рассчитать точно и указать, в каких пределах вариации параметров задачи (например, цен на продукцию или величины спроса) они не подвержены изменению. Расчет о.о.о. придал новое измерение теории ЛП, связав производственную программу с теневыми ценами на ресурсы. Другим приложением той же идеи была концепция замыкающих затрат, которую предлагалось использовать в разработке эффективных решений в добывающих отраслях, электроэнергетике и сельском хозяйстве. Величина о.о.о. рассчитывается в ходе решения так называемой двойственной задачи ЛП, которая строится по исходной на основе формального математического правила.

Первая теорема двойственности гласит, что выручка от продажи продукции согласно оптимальному плану равна затратам на использование ресурсов при условии, что ресурсы оцениваются в соответствии с теневыми (а не рыночными) ценами. Указанное соотношение позволяет оценивать такие ресурсы, как труд (его дефицитность определяется в натуральных единицах),

рента (дифференциальная рента по плодородности земли) и т.п. Вторая теорема двойственности указывает, что некоторые неизвестные задачи при оптимуме, как правило, должны равняться нулю. Если задуматься о содержании, то равенство нулю выпуска некоего продукта из возможного ассортимента не есть чисто математический феномен. Это означает (временный) уход с рынка продукта и необходимость переналадки оборудования, оживления каналов сбыта, рекламы — в случае возобновления выпуска данного продукта. Иногда такое решение может означать закрытие производства в целом городе (например, закрытие шахты). Соответствующий математический анализ на устойчивость такого решения по отношению к параметрам задачи (такая устойчивость может трактоваться как долгосрочность решения) является важным компонентом принятия решений в соответствующих случаях.

Приложения указанных задач к управленческой практике многообразны. В [Канторович, 1959] подробно разбираются следующие примеры, многие из которых не утратили своей важности и поныне:

- нахождение оптимальной производственной программы;
- оценка морального старения оборудования;
- оценка труда вообще и квалифицированного труда в частности;
- методы экономии дефицитных материалов, в том числе оптимальный раскрой стандартных заготовок материалов на стадии подготовительного производства (лес, прокат металлов, кожа и ткани в легкой промышленности и т.д.);
- дифференциальная рента при использовании природных источников;
- эффективность капиталовложений (в задачах с несколькими независимыми проектами инвестиций с произвольно меняемым масштабом);
- задача об управлении перевозками — транспортная задача.

Отметим, что оптимальный раскрой [Канторович, Залгаллер, 1971] и транспортная задача относятся к числу любимых задач Канторовича, которыми он занимался вместе со своими учениками на протяжении почти всей жизни. Вопрос об этих приложениях требует отдельного обсуждения, но очевидно, что для больших фирм невозможно построить эффективную систему логистики без решения в той или иной форме транспортной задачи.

Остановимся немного на вопросах истории в их современной интерпретации. В статье [Gardner, 1990] была предпринята формальная попытка, развивающая критику более ранней работы [Charnes, Cooper, 1961]¹⁴, выяснить, является ли Канторович создателем ЛП. По мнению автора статьи [Gardner, 1990] — не является, но, с одной стороны, он — предтеча появления ЛП, а с другой стороны, он рассмотрел более общую нелинейную задачу. Свою логику Гарднер подкрепляет тем, что теория ЛП содержит два основополагающих результата: симплекс-метод для решения задачи за конечное число шагов (результат Дж. Данцига 1947 г., сам термин «линейное программирование» ввел тот же Данциг в 1949 г.) и теорию двой-

ственности (см.: [Gale, Kuhn, Tucker, 1951]; идея восходит к работам Дж. фон Неймана по теории игр). Оба результата действительно не были известны Канторовичу. Более того, Канторович не рассматривал также возможность отсутствия допустимых решений — она выявляется при решении задачи симплекс-методом. Кроме того, отмечается, что математические теоремы существования разрешающих множителей (о.о.о. Канторовича) были доказаны им с помощью теоремы отделимости для выпуклых множеств, т.е. не используют собственно линейности модели. Все это верно. Однако Канторович придумал-таки разрешающие множители, оказавшиеся позже двойственными переменными, но пришел он к ним, исходя из экономической интуиции, сразу дав им интерпретацию цен на ресурсы. Безусловно, в теории двойственности с ее теневыми ценами все более красиво и стройно, но это не отменяет тот факт, что решающий математический и, главное, экономический пробой был совершен Канторовичем.

Монография Дж. Данцига, вышедшая в свет в 1963 г., быстро была переведена на русский язык [Данциг, 1966]. Позднее в книге [Dantzig, Thapa, 1997], являющейся вводным учебником по ЛП (без математических доказательств), Данциг опять возвращается к вопросам истории. В продолжении этой книги — учебнике [Dantzig, Thapa, 2003] — приведена математическая теория. Сам Канторович рассказывает о своих шагах по созданию и продвижению ЛП в 1938–1941 гг. в своих, появившихся уже после его смерти, воспоминаниях [Канторович, 1987, с. 198–204].

В советской экономической науке имя Канторовича часто ставят в один ряд с именем другого ленинградского экономиста В. В. Новожилова. Они не только вместе получили Ленинскую премию 1965 г. (совместно с В. С. Немчиновым), но и оба занимались оптимизацией. Новожилов блестяще начал международную карьеру

¹⁴ В этой работе авторы отделяют Канторовича и Купманса от Данцига, Гейла и др. Первые, по мнению авторов, недостаточно точно формулируют математические определения и выводы, а потому могут претендовать только на роль предтечи, тогда как последние впервые получили строгие математические результаты. Не исключено, что такое противопоставление решило судьбу тех, кто получил и кто не получил Нобелевскую премию 1975 г. Отметим, что у Канторовича действительно встречались математические небрежности (не только в этом контексте): надо помнить — работы первопроходцев имеют право быть корявыми и трудными для понимания. Интереснейшая переписка по поводу публикации в США в конце 1950-х гг. переводов работ Канторовича 20-летней давности и комментариев к ним приведена в [Леонид..., 1999] (см., в частности, на стр. 35–40 реакцию Канторовича на появление работы [Charnes, Cooper, 1961]).

в 1920-х гг., но далее его научная судьба складывалась непросто.¹⁵ Его первая книга [Новожилов, 1967], вышедшая из печати с еще большим опозданием, чем [Канторович, 1959], и посвященная оптимизации с приложениями к задаче эффективности, относится к области теоретической микроэкономики. Этот труд, в отличие от работ Канторовича, назвать управленческим нельзя. Заслуга Новожилова заключалась в последовательном отстаивании опасного в те времена принципа экономического равновесия при социалистическом методе хозяйствования. Отметим, однако, что мировые исследования по инвестициям ушли к тому времени далеко вперед — изучать эффективность капиталовложений в статике невозможно. Кстати, и ссылки на Канторовича ограничиваются общими замечаниями на первых страницах.

До сих пор, насколько нам известно, внимание историков экономико-математических методов не привлекала монография [Чумаченко, 1971], посвященная, выражаясь современным языком, такой неизвестной в те времена в нашей стране проблеме, как управленческий учет. Ее автор не только спокойно пользуется термином «маржинальный доход», но и показывает ошибки в применении модели ЛП в ряде американских учебников, изданных в 1960-х гг. [Чумаченко, 1971, с. 57], связанные с подготовкой данных для задачи максимизации прибыли, — нельзя распределять постоянные затраты между факторами на основе имевших место исторических пропорций.

Немеханистических публикаций по ЛП с использованием двойственности в СССР оказалось на удивление мало. Можно упомянуть книгу ленинградского экономиста С. С. Гдалевича, изданную в серии ЦЭМИ «Проблемы советской экономики», где речь шла о моделировании оптимального поведения производственных комплексов в

условиях хозрасчета, что приводило, в частности, к нахождению трансфертных цен и цен на новую технику [Гдалевич, 1975]. Дальнейшего развития это направление не нашло.

В конце 1950-х гг. в СССР началось активное продвижение американских работ по исследованию операций и теории игр, организованное также при непосредственном участии Канторовича.¹⁶ Огромную роль сыграл перевод сборника статей под редакцией Г. Куна и А. Таккера [Линейные..., 1959]. Перевод с английского был осуществлен под редакцией Л. В. Канторовича и В. В. Новожилова. В этой книге впервые на русском языке появилось строгое математическое описание теории двойственности (редакторы оригинального издания — авторы классической теоремы двойственности, носящей имя теоремы Куна — Таккера) — красивая и более общая постановка того, что было угадано Канторовичем в форме объективно-обусловленных оценок. В книге был приведен хороший популярный обзор приложений теории игр — нового направления, заложенного в конце 1920-х гг. великим Дж. фон Нейманом¹⁷. Это направление до сего дня является одним из определяющих лицо современной экономической теории и отмечено рядом Нобелевских премий. Еще важнее содержания книги оказалось то организующее влияние, которое выразилось в том, что большинство переводчиков, совсем молодых тогда математиков, стали ведущими специалистами по исследованию операций и теории игр, внесли значительный вклад во внедрение и развитие этих направлений в ЛГУ, ЛО ЦЭМИ АН СССР, Институте математики СО АН СССР. Более того, в Ленинграде — Петербурге появилась мощная

¹⁶ Историю исследований отечественных экономистов по применению методов оптимизации см. в [Белых, 1990].

¹⁷ Точнее, первая работа была опубликована Дж. фон Нейманом в 1928 г., последняя — в 1954 г. (подробнее см.: [Kuhn, Tucker, 1958]).

¹⁵ Ранние работы и биографический очерк см. в [Новожилов, 1995].

школы теории игр, возглавляемая профессором Л. А. Петросьяном.¹⁸

Теперь остановимся на фактах, которые не умаляют заслуги Канторовича, а скорее характеризуют среду, в которой мы жили и до сих пор живем. Их можно охарактеризовать так: «Нет пророка в своем отечестве».

Начнем с анекдотического факта, на который нам указал И. В. Романовский. В нем вызывает удивление не столь позиция автора статьи [Залыгин, 1996], сколько то, что редколлегия журнала «Новый мир» пропустила статью с беллетристическим обсуждением роли Канторовича, завершающимся следующей цитатой: «Года через два Канторович эмигрировал в Америку <...> еще год-другой спустя он стал лауреатом Нобелевской премии» [Залыгин, 1996, с. 149].

В монографии [Лэсдон, 1975] впервые на русском языке появилось описание алгоритма генерации столбцов в задаче ЛП — важного для практики результата, позволяющего не выписывать всю матрицу коэффициентов сразу, а генерировать только те столбцы, которые необходимы по ходу вычислений. Сам метод был придуман и, быть может, не совсем в очевидной форме представлен еще в первом (1951 г.) издании монографии [Канторович, Залгаллер, 1971], где в реальных задачах раскрытия без него трудно обойтись. Подробная публикация с участием Канторовича появилась существенно позже (см. [Канторович, Романовский, 1985]). Лэсдон приходит к генерации столбцов тоже отталкиваясь от задачи раскрытия. Можно предположить, что монография Л. В. Канторовича и В. А. Залгаллера 1951 г., изданная на русском языке, была недоступна западным исследова-

телям. Трудно, однако, представить, что эта работа не была известна специалистам в СССР, где задачи раскрытия были из числа немногих, реально внедрявшихся в производство (в лесной отрасли, судостроении, машиностроении и др.). Тем самым вызывает удивление, что редактор перевода, кстати хороший знакомый Л. В. Канторовича, привел «Дополнительный список литературы» [Лэсдон, 1975, с. 430–431], включающий 32 источника и призванный компенсировать то, что «исследования, проводимые в СССР, фактически совершенно не упомянуты», в котором не приводится ни одна работа Л. В. Канторовича (но упоминаются три работы самого редактора). Нет имени Л. В. Канторовича и в предисловии «От редактора перевода» [Лэсдон, 1975, с. 7–9] — имеются ссылки исключительно на недавнее издание учебника Дж. Данцига [Данциг, 1966] на русском языке.

Коснемся теперь совсем недавнего прошлого. На компакт-диске «Классики экономической мысли» электронного издательства Directmedia Publishing [Классики..., 2008] с авторитетным составом редколлегии не удастся найти имени Канторовича (а равно и В. В. Леонтьева — другого Нобелевского лауреата по экономике, закончившего СПбГУ, хотя их современники присутствуют, не говоря уже о «редких» работах К. Маркса и В. И. Ленина). Представляется, что Канторович с Леонтьевым (чьи работы на русском — огромная библиографическая редкость) «пострадали» за то, что они являются безусловным доказательством «всеобъемлющей математизации» экономического мейнстрима.

6. Линейное программирование: от оперативного — к стратегическому

Следует отметить, что одна из трудностей внедрения ЛП заключалась в неосознании его сторонниками факта различия методики

¹⁸ Отметим, что с 2007 г. ежегодно на базе Высшей школы менеджмента СПбГУ проводится Международная конференция «Теория игр и менеджмент», публикуются ее материалы [Contributions to Game Theory and Management, 2007–2011], см.: <http://dSPACE.gsom.spbu.ru/jsptui>.

применения ЛП для целей текущего и стратегического планирования. Если о текущем планировании неоднократно писалось и вопрос представляется ясным, то иначе обстоит дело со стратегическим менеджментом. Решение задачи ЛП приводит, как правило, к тому, что ряд продуктов из числа возможных не производится или часть возможных способов производства (технологических и организационных) не используется. Здесь уместно остановиться на понимании термина «ресурсы».

В текущем планировании ресурсы отождествляются с факторами в неоклассическом смысле слова. Факторы уже есть — их не надо создавать. Современный стратегический менеджмент ориентируется на рассмотрение тех ресурсов, которые надо создавать в динамическом процессе управления фирмой, на учет специфических компетенций фирмы [Катялко, 2003; 2006]. Сам Канторович не уделял особого внимания тому обстоятельству, что в оптимальном решении бывает много нулей (это скорее раздражало его при интерпретации нулевых теневых цен, которые он предлагал брать на практике ненулевыми, но «очень маленькими» [Канторович, 1959]). Сам факт является следствием второй теоремы двойственности, которую знал и использовал Канторович, но явно математически сформулировал американский математик Дж. Данциг. Равенство нулю переменной, отвечающей за объем производства основного продукта или интенсивность применения некоторой технологии, означает принятие стратегического решения (например, это может быть решение использовать или не использовать некоторую компетенцию).

По существу, это означает необходимость рассматривать ЛП не как изолированную модель или технический вычислительный инструмент, а как интегральную часть общей модели принятия решений, которая, наряду с моделью ЛП, содержит как количественные, так и качественные модели

принятия решений. Соответствующая система моделей, безусловно, носит иерархический характер (причем с учетом обратных связей) и вполне укладывается в теорию принятия стратегических решений с использованием аппарата аналитических сетей (см. [Саати, 2011]). Настоящая статья, посвященная Л. В. Канторовичу, не является подходящим местом для углубления в указанную проблематику. Но для того чтобы хотя бы немного прояснить нашу позицию, рассмотрим следующую условную ситуацию.

Предположим, что в холдинг, выпускающий несколько видов продукции, входит ряд предприятий. Владельцы холдинга, решающие свою оптимизационную задачу — максимизация финансового результата холдинга (прибыли или объема продаж), — используют модель ЛП, где неизвестными являются объемы выпуска на каждом из предприятий холдинга. Допустим, что в результате оказывается, что на одном из предприятий целесообразно вообще прекратить какое-либо производство. Что можно предпринять в этом случае? Во-первых, можно оставаться в условиях модели ЛП и провести анализ чувствительности этого нулевого решения к возможным изменениям исходных данных: затрат, цен, улучшения технологии и пр. Это все осуществляется с помощью стандартных методов ЛП. Если выясняется, что для «спасения» данного предприятия требуется произвести нереалистические изменения в затратах, улучшения технологии и т. п., то это однозначно указывает на то, что необходимо перейти к более высокому стратегическому уровню рассмотрения модели. На этом уровне могут быть решены многие задачи. Среди самых очевидных отметим следующие. Надо дать ответ на вопрос, возможно ли продать это предприятие, и если да, то по какой цене. Имеется множество моделей оценивания, и ни одна из них напрямую не стыкуется с моделью ЛП, т. е. требует своего отдельного рассмотрения.

Если продажа невозможна или экономически нецелесообразна, то встает вопрос о возможности репрофилирования этого предприятия. Это уже инвестиционный проект, требующий рассмотрения его в динамике, причем соответствующая математическая модель опять не будет связана с исходной задачей. Далее, инвестиционный проект касается только вопросов необходимости осуществления определенного объема инвестиций и рентабельности соответствующего проекта. Но ничего не говорит об источниках и стоимости финансирования. Таким образом, мы сталкиваемся с системой моделей по принятию инвестиционных проектов. Построение подобных альтернатив и их деревьев можно продолжать далее, и формально или неформально это все равно делается в бизнесе. Безусловно, реальные модели должны учитывать фактор неопределенности, может быть целесообразна временная консервация производства, так как при изменении спроса в будущем оно имеет свой потенциал (реальный опцион ожидания). Таким образом, ЛП, относящееся, как правило, к короткому периоду существования фирмы, является существенной частью системы моделей, описывающую разнообразные стратегические альтернативы.

Безусловно, имеются позитивные подтверждающие примеры того, что модель ЛП может быть встроена в такую систему моделей. Например, модель свертки данных (data envelopment analysis — DEA), оценивающая сравнительные эффективности, основана на вычислении весов, определяемых из решения специальным образом построенной двойственной задачи ЛП (см., напр.: [Буссофиане, Дайсон, Танасулис, 2012]).

Необходимость качественного анализа, далеко выходящего за рамки ЛП, делает тем не менее анализ линейной модели важной составной частью интегрального исследования. Например, подсчитав затраты и решив не принимать стратегического ре-

шения, целесообразно с новыми данными о возможных затратах вернуться к задаче об оптимуме. Может быть, неформальная интуиция подвела! Это направление приложений было совсем упущено.

Не во всех теоретических и практических экономических и управленческих задачах можно сформулировать задачу в форме модели оптимизации. Вопрос о субъективности выбора оптимизируемой функции привел некоторых известных специалистов даже к отрицанию полезности оптимизационного подхода в принципе [Моисеев, 1979]. Хотя автор и не согласен с такой постановкой, некоторые уточнения все же целесообразно сделать. В менеджменте мы часто ищем не оптимальные, а только допустимые решения. Впрочем, и допустимые для фирмы решения найти нелегко. В качестве примера укажем, что общепринятый алгоритм принятия инвестиционных решений с помощью критерия положительности NPV проекта является допустимым с точки зрения неразрушения ценности компании, но вовсе не обязательно максимизирующим эту ценность. Это связано, в частности, с тем, что невозможно формально описать множество всех инвестиционных проектов компании. На практике регулярно оказывается, что лучшие инвестиционные проекты не были найдены. В данном случае все равно идет речь если не об оптимизации, то об увеличении значения целевой функции — ценности компании. Отсюда и произошел распространенный термин «ценностно-ориентированный менеджмент» (VBM).

В связи с этим отметим весьма интересные экономико-математические исследования 1980-х гг. (см. [Еремин, 1988; Еремин, Мазуров, Астафьев, 1983]), в которых рассматриваются противоречивые математические модели оптимизации (в частности, ЛП), т. е. модели, не имеющие допустимых решений. Тем не менее техника оптимизации позволяет предложить подсказки, в каком направлении должны быть изменены

исходные данные экономической задачи. На практике это, безусловно, опять выход на уровень принятия стратегических решений.

Отметим, что если в 1950-е гг. изложение ЛП зачастую включалось в монографии и учебники по микроэкономике как часть неоклассической теории фирмы (упомянем лишь монографию классиков экономической теории [Dorfman, Samuelson, Solow, 1958]), то уже к 1970-м гг. эта традиция почти сошла на нет. Для микроэкономики ЛП — и слишком упрощенно, и слишком конкретно. Вместе с тем не скроем, что и слишком трудно. Излагаемая в учебнике по микроэкономике фирма — однопродуктовая. Задачи ЛП о выборе производственной программы не существует (она тривиальна) для однопродуктовой фирмы. ЛП — это теория многопродуктовой фирмы или фирмы, обладающей многими взаимозаменяемыми технологиями!

Использованный в названии монографии [Канторович, 1959] термин «ресурсы» соответствует неоклассическому понятию «факторы производства» и означает наличные ресурсы (сырье, материалы, полуфабрикаты, комплектующие, энергия, труд и т. п.). Ресурсная концепция современного стратегического менеджмента предполагает абсолютно иную трактовку: ресурсы связаны с внутрифирменной организацией процессов, они создаются и совершенствуются внутри фирмы для достижения конкурентных преимуществ, ресурсы уникальны и не торгуются на рынке.

Канторович был, конечно, далек от столь общего понимания проблемы (как и его современники на Западе). Однако он смело вводил в свои рассуждения некантифицируемые факторы, которые являются ресурсами в их современном понимании. Примером такого исследования выступает серия поздних публикаций Л. В. Канторовича (см., напр.: [Канторович, 1974]); в дальнейшем это направление исследований было продолжено В. Л. Макаровым (см.,

например, работы [Макаров, 2009; Макаров, Клейнер, 2007] о знаниях как ценном активе (обычно употреблялись термины «нововведения», «НТП» и пр.)). Эти работы опубликованы одновременно с результатами западных исследований по теории знаний и показывают, что, несмотря на некоторую вынужденную оторванность от западных исследований, труды Канторовича всегда находились на переднем крае теории менеджмента.

Рассмотрим статистику публикаций, связанных с ЛП в журнале *Management Science* в первые три года существования (1954–1956) и за последние три года (2009–2011). Конечно, в первых трех томах журнала, в тот момент, когда ЛП было на пике научной популярности, доля статей, посвященных ЛП, должна была быть выше, чем сейчас. В качестве дополнительного соображения надо отметить более высокую конкуренцию между доступными исследовательскими техниками в наше время. Результаты следующие. В 1954–1956 гг. в 33 из 75 исследовательских статей имеется существенная связь с развитием или использованием техники ЛП (44%). В 2009–2011 гг. 7 статей в значительной мере были посвящены развитию или использованию ЛП, при общем числе статей порядка 150 (около 5%). При современной конкуренции между существующими исследовательскими техниками и с учетом расширения проблематики *Management Science*, которая, в частности, включает теперь стохастические задачи, результат, равный 5%, представляется вполне конкурентоспособным. Отметим, что в проблематике статей, посвященных приложениям ЛП, появились такие отсутствовавшие в 1950-е гг. сферы управленческой деятельности, как, например, подбор персонала для многопрофильных колл-центров (см. [Cezik, L'Ecuyer, 2008]).

Методы ЛП работают как в «мгновенно-коротком» периоде, т. е. в случае производственного менеджмента, так и в случае

стратегического менеджмента (отказ или введение нового продукта в производственную программу, использование или исключение ресурса/компетенции при производ-

стве продукции и т. п.). В этом отношении ЛП и результаты Канторовича по-прежнему являются мощным аппаратом принятия решений в бизнесе.

ЛИТЕРАТУРА

- Белых А. А. 1990. *История советских экономико-математических исследований*. Л.: Изд-во Ленинградского университета.
- Бернулли Д. 1999. Опыт новой теории измерения. В сб.: *Вехи экономической мысли. Т. 1. Теория потребительского поведения и спроса*. СПб.: Экономическая школа; 11–27. <http://www.seinst.ru>
- Богачев В. Н. 1975. О норме эффективности капитальных вложений и дисконтной ставке. В сб.: Богачев В. Н. (ред.). *Оптимизация сроков осуществления инвестиционных программ*. Новосибирск: ИЭиОПП СО АН СССР.
- Бурков В. Н. 1977. *Основы математической теории активных систем*. М.: Наука.
- Буссофиане А., Дайсон Р. Дж., Танасулис Е. 2012. Прикладной анализ свертки данных. *Российский журнал менеджмента* 10 (2): 63–88.
- Бухвалов А. В. 2003. Л. В. Канторович как теоретик менеджмента. *Российский журнал менеджмента* 1 (2): 141–150.
- Бухвалов А. В. 2010. Л. В. Канторович и теория менеджмента. В кн.: Леонов Г. А., Катъкало В. С., Бухвалов А. В. (ред.). *Леонид Витальевич Канторович: математика, менеджмент, информатика*. СПб.: Изд-во «Высшая школа менеджмента»; 197–221.
- Бухвалов А. В. 2012. Леонид Витальевич Канторович и теория менеджмента. *Санкт-Петербургский университет* (1): 14–15.
- Бухвалов А. В., Дмитриев А. Л. 1999. Л. В. Канторович и шестой курс экономического факультета ЛГУ в 1959 г. в русле становления экономической науки в России. В: *Петербургская академия наук в истории академий мира. К 275-летию Академии наук. Материалы международной конферен-*
- ции 28 июня — 4 июля 1999 г. Т. IV*. СПб.: С.-Петербургский научный центр РАН; 208–224.
- Бухвалов А. В., Дмитриев А. Л. 2009. Л. В. Канторович и становление экономико-математического образования в СССР. В кн.: Леонов Г. А., Катъкало В. С., Бухвалов А. В. (ред.). *Леонид Витальевич Канторович: математика, менеджмент, информатика*. СПб.: Изд-во «Высшая школа менеджмента»; 463–492.
- Гальперин В. М., Игнатъев С. М., Моргунов В. И. 1996. *Микроэкономика*. 2-е изд. Т. 1. СПб.: Экономическая школа.
- Гальперин В. М., Игнатъев С. М., Моргунов В. И. 1997. *Микроэкономика*. Т. 2. СПб.: Экономическая школа.
- Гдалевич С. С. 1975. *Вопросы прикладного использования двойственных оценок*. М.: Наука.
- Гранберг А. Г. 1988. *Моделирование социалистической экономики*. М.: Экономика.
- Данциг Дж. 1966. *Линейное программирование, его обобщения и применения*. Пер. с англ. М.: Прогресс.
- Еремин И. И. 1988. *Противоречивые модели линейного программирования*. М.: Наука.
- Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н. 1983. *Несобственные задачи линейного программирования*. М.: Наука.
- Залыгин С. 1996. Моя демократия. *Новый мир* (12): 130–169.
- Зенкевич Н. А., Петросян Л. А., Янг Д. В. К. 2009. *Динамические игры и их приложения в менеджменте*. СПб.: Изд-во «Высшая школа менеджмента».
- Канторович В. Л., Кутателадзе С. С., Фет Я. И. (ред.). 2002. *Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый. Т. 1*. Новосибирск: Изд-во СО РАН, Филиал «Тео».

- Канторович В. Л., Кутателадзе С. С., Фет Я. И. (ред.). 2004. *Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый. Т. 2*. Новосибирск: Изд-во СО РАН, Филиал «Тео».
- Канторович Л. В. 1939. *Математические методы организации и планирования производства*. Л.: Изд-во ЛГУ.
- Канторович Л. В. 1959. *Экономический расчет наилучшего использования ресурсов*. М.: Изд-во АН СССР.
- Канторович Л. В. 1974. Экономические проблемы научно-технического прогресса. *Экономика и математические методы* 10 (3): 432–448.
- Канторович Л. В. 1980. *Оптимизационные методы в текущем планировании*. Выступление на Всесоюзной конференции «Использование методов оптимизации в текущем планировании и оперативном управлении производством» (Москва, 17–19 октября 1979 г.). М.: ВНИИСИ; 12–21.
- Канторович Л. В. 1987. Мой путь в науке. *Успехи математических наук* 42 (2): 183–213.
- Канторович Л. В. 2011. *Математико-экономические работы*. Новосибирск: Наука.
- Канторович Л. В. 2012а. *Экономика и математика: Избранное*. СПб.: Нестор-История.
- Канторович Л. В. 2012б. *Математические методы организации и планирования производства. (Репринтное издание к 100-летию со дня рождения Леонида Витальевича Канторовича)*. Сост. И. В. Романовский. СПб.: Издат. дом СПбГУ.
- Канторович Л. В., Залгаллер В. А. 1971. *Рациональный раскрой промышленных материалов*. 2-е изд. (1-е изд. — 1951). Новосибирск: Наука.
- Канторович Л. В., Залгаллер В. А. 2012. *Рациональный раскрой промышленных материалов*. 3-е изд., испр. и дополн. СПб.: Невский диалект.
- Канторович Л. В., Макаров В. Л. 1965. Оптимальные модели перспективного планирования. В сб.: *Применение математики в экономических исследованиях*. Т. III. М.: Мысль.
- Канторович Л. В., Макаров В. Л. 1984. Цены и эффективность производства. *Экономика и математические методы* 20 (1): 28–41.
- Канторович Л. В., Романовский И. В. 1985. Генерирование столбцов в симплекс-методе. *Экономика и математические методы* 21 (1): 128–138.
- Каплан Р. С., Нортон Д. П. 2004. Сбалансированная система показателей, определяющих эффективность работы организации. *Российский журнал менеджмента* 2 (3): 70–90.
- Катъкало В. С. 2003. Методологические особенности и приоритеты развития ресурсной концепции стратегического управления. *Экономическая наука современной России* (2): 71–80.
- Катъкало В. С. 2006. *Эволюция теории стратегического управления*. СПб.: Издат. дом СПбГУ.
- Классики экономической мысли. 2008. CD-ROM. Авт. колл.: Автономов В. С., Макашева Н. А., Гловели Г. Д., Латов Ю. В. Составитель: Ананьин О. И. М.: Direct-media Publishing.
- Кутателадзе С. С. (ред.). 2012. *Леонид Витальевич Канторович (1912–1986): Библиографический указатель*. Новосибирск: Изд-во И-та математики.
- Леонид Витальевич Канторович. Материал подготовлен к публикации В. Л. Канторовичем. 1999. *Экономика и математические методы* 35 (3): 25–42.
- Леонов Г. А., Катъкало В. С., Бухвалов А. В. (ред.). 2010. *Леонид Витальевич Канторович: математика, менеджмент, информатика*. СПб.: Изд-во «Высшая школа менеджмента».
- Линейные неравенства и смежные вопросы*. 1959. Сб. статей под ред. Г. У. Куна и А. У. Таккера. С приложением книги С. Вайда «Теория игр и линейное программирование». Сборник переводов с английского под редакцией Л. В. Канторовича и В. В. Новожилова. М.: Изд-во иностранной литературы.
- Лэсдон Л. С. 1975. *Оптимизация больших систем*. Пер. с англ. под ред. А. А. Первозванского. М.: Физматгиз.
- Макаров В. Л. 2009. Обзор математических моделей экономики с инновациями. *Экономика и математические методы* 45 (1): 3–14.

- Макаров В. Л. 2011. Канторович — универсальный гений. *Экономика и математические методы* 47 (4): 3–6.
- Макаров В. Л., Клейнер Г. Б. 2007. *Микроэкономика знаний*. М.: Экономика.
- Мойсеев Н. Н. 1979. *Математика ставит эксперимент*. М.: Наука.
- Новожилов В. В. 1967. *Проблемы измерения затрат и результатов при оптимальном планировании*. М.: Экономика.
- Новожилов В. В. 1995. *У истоков подлинной экономической науки*. М.: Наука.
- Поспелов Г. С., Ириков В. А. 1976. *Программно-целевое планирование и управление*. М.: Советское радио.
- Романовский И. В. 2010. Леонид Витальевич Канторович: некоторые черты научной биографии. В кн.: Леонов Г. А., Каткало В. С., Бухвалов А. В. (ред.). *Леонид Витальевич Канторович: математика, менеджмент, информатика*. СПб.: Изд-во «Высшая школа менеджмента»; 9–38.
- Саати Т. Л. 2011. *Принятие решений при зависимостях и обратных связях*. 3-е изд. Пер. с англ. М.: URSS.
- Чейз Р. Б., Эквилайн Н. Дж., Якобс Р. Ф. 2001. *Производственный и операционный менеджмент*. 8-е изд. Пер. с англ. М.: Издат. дом «Вильямс».
- Чумаченко Н. Г. 1971. *Учет и анализ в промышленном производстве США*. М.: Финансы.
- Эйлер Л. 1934. *Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле*. Пер. с лат. М.-Л.: АН СССР.
- Cezik M. T., L'Ecuyer P. 2008. Staffing multiskill call centers via liner programming and simulation. *Management Science* 54 (2): 310–323.
- Charnes A., Cooper W. W. 1961. On some works of Kantorovich, Koopmans, and others. *Management Science* 8 (3): 246–263.
- Contributions to Game Theory and Management*. 2007–2011. Ed. by Petrosyan L. A., Zenkevich N. A. Collected Papers presented on the International Conference “Game Theory and Management”. Graduate School of Management, St. Petersburg University.
- Dantzig G. B., Thapa M. N. 1997. *Linear Programming 1: Introduction*. Springer: N. Y.
- Dantzig G. B., Thapa M. N. 2003. *Linear Programming 2: Theory and Extensions*. Springer: N. Y.
- Dorfman R., Samuelson P. A., Solow R. M. 1958. *Linear Programming and Economic Analysis*. McGraw-Hill: N. Y.
- Friedman M. 1953. The methodology of positive economics. In: Friedman M. *Essays in Positive Economics*. University of Chicago Press: Chicago; 3–43.
- Gale D., Kuhn H. W., Tucker A. W. 1951. Linear programming and the theory of games. In: Koopmans T. C. (ed.). *Activity Analysis of Production and Allocation*. Wiley: N. Y.; 317–329.
- Gardner R. 1990. L. V. Kantorovich: The price implications of optimal planning. *Journal of Economic Literature* 28 (2): 638–648.
- Kantorovich L. V. 1965. *The Best Use of Economic Resources*. Pergamon Press: Oxford.
- Kantorovich L. V. 1977. *Essays in Optimal Planning*. Basil Blackwell: Oxford.
- Koutsoyiannis A. 1979. *Modern Microeconomics*. 2nd ed. Macmillan Press: London.
- Kuhn H. W., Tucker A. W. 1958. John von Neumann's work in the theory of games and mathematical economics. *Bulletin of the American Mathematical Society* 64 (3, part 2): 100–122.
- Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., Shrijver A. (eds.). 1991. *History of Mathematical Programming*. North-Holland: Amsterdam.
- Lipsey R. N. 1963. *An Introduction to Positive Economics*. Weidenfeld and Nicolson: London.
- Render B., Stair R. M., Jr. 2000. *Quantitative Analysis for Management*. 7th ed. Prentice Hall: N. Y.
- Shapiro J. F. 2007. *Modeling the Supply Chain*. 2nd ed. Thompson Higher Education: N. Y. (Русск. пер. 1-го изд.: Шапиро Дж. 2006. *Моделирование цепи поставок*. СПб.: Питер.)

Латинская транслитерация литературы, набранной на кириллице
The List of References in Cyrillic Transliterated into Latin Alphabet

- Belykh A. A. 1990. *Istoriya sovetskikh ekonomiko-matematicheskikh issledovaniy*. L.: Izd-vo Leningradskogo universiteta.
- Bernulli D. 1999. Opyt novej teorii izmereniya. V sb.: *Vekhi ekonomicheskoy mysli. T. 1. Teoriya potrebitel'skogo povedeniya i sprosa*. SPb.: Ekonomicheskaya shkola; 11–27. <http://www.seinst.ru>
- Bogachev V. N. 1975. O norme ehffektivnosti kapital'nykh vlozhenij i diskontnoj stavke. V sb.: Bogachev V. N. (red.). *Optimizatsiya srokov osushhestvleniya investitsionnykh programm*. Novosibirsk: IEHiOPP SO AN SSSR.
- Burkov V. N. 1977. *Osnovy matematicheskoy teorii aktivnykh sistem*. M.: Nauka.
- Bousofiane A., Dyson R. G., Thanassoulis E. 2012. Prikladnoj analiz svertki dannykh. Per. s angl. *Rossijskij zhurnal menedzhmenta* 10 (2): 63–88.
- Bukhvalov A. V. 2003. L. V. Kantorovich kak teoretik menedzhmenta. *Rossijskij zhurnal menedzhmenta* 1 (2): 141–150.
- Bukhvalov A. V. 2010. L. V. Kantorovich i teoriya menedzhmenta. V kn.: Leonov G. A., Katkalo V. S., Bukhvalov A. V. (red.). *Leonid Vital'evich Kantorovich: matematika, menedzhment, informatika*. SPb.: Izd-vo «Vysshaya shkola menedzhmenta»; 197–221.
- Bukhvalov A. V. 2012. Leonid Vital'evich Kantorovich i teoriya menedzhmenta. *Sankt-Peterburgskij universitet* (1): 14–15.
- Bukhvalov A. V., Dmitriev A. L. 1999. L. V. Kantorovich i shestoj kurs ekonomicheskogo fakul'teta LGU v 1959 g. v rusle stanovleniya ekonomicheskoy nauki v Rossii. V: Leonov G. A., Katkalo V. S., Bukhvalov A. V. (red.). *Peterburgskaya akademiya nauk v istorii akademij mira. K 275-letiyu Akademii nauk. Materialy mezhdunarodnoj konferentsii 28 iyunya — 4 iyulya 1999 g. T. IV*. SPb.: S.-Peterb. nauchnyj tsentr RAN; 208–224.
- Bukhvalov A. V., Dmitriev A. L. 2009. L. V. Kantorovich i stanovlenie ekonomiko-matematicheskogo obrazovaniya v SSSR. V: *Leonid Vital'evich Kantorovich: matematika, menedzhment, informatika*. SPb.: Izd-vo «Vysshaya shkola menedzhmenta»; 463–492.
- Galperin V. M., Ignat'ev S. M., Morgunov V. I. 1996. *Mikroekonomika*. 2-e izd. T. 1. SPb.: Ekonomicheskaya shkola.
- Galperin V. M., Ignat'ev S. M., Morgunov V. I. 1997. *Mikroekonomika*. T. 2. SPb.: Ekonomicheskaya shkola.
- Gdalevich S. S. 1975. *Voprosy prikladnogo ispol'zovaniya dvoystvennykh otsenok*. M.: Nauka.
- Granberg A. G. 1988. *Modelirovanie sotsialisticheskoy ekonomiki*. M.: Ekonomika.
- Dantzig G. 1966. *Linejnoe programmirovanie, ego obobshheniya i primeneniya*. Per. s angl. M.: Progress.
- Eremin I. I. 1988. *Protivorechivye modeli linejnogo programmirovaniya*. M.: Nauka.
- Eremin I. I., Mazurov V. D., Astaf'ev N. N. 1983. *Nesobstvennyye zadachi linejnogo programmirovaniya*. M.: Nauka.
- Zalygin S. 1996. Moya demokratiya. *Novyj mir* (12): 130–169.
- Zenkevich N. A., Petrosyan L. A., Yang D. V. K. 2009. *Dinamicheskie igry i ikh prilozheniya v menedzhmente*. SPb.: Izd-vo «Vysshaya shkola menedzhmenta».
- Kantorovich V. L., Kutateladze S. S., Fet Ya. I. (red.). 2002. *Leonid Vital'evich Kantorovich: chelovek i uchenyj. T. 1*. Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, Filial «Teo».
- Kantorovich V. L., Kutateladze S. S., Fet Ya. I. (red.). 2004. *Leonid Vital'evich Kantorovich: chelovek i uchenyj. T. 2*. Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, Filial «Teo».
- Kantorovich L. V. 1939. *Matematicheskie metody organizatsii i planirovaniya proizvodstva*. L.: Izd-vo LGU.

- Kantorovich L.V. 1959. *Ekonomicheskij raschet nailuchshego ispol'zovaniya resursov*. M.: Izd-vo AN SSSR.
- Kantorovich L.V. 1974. Ekonomicheskie problemy nauchno-tehnicheskogo progressa. *Ekonomika i matematicheskie metody* **10** (3): 432–448.
- Kantorovich L.V. 1980. *Optimizatsionnye metody v tekushhem planirovanii*. Vystuplenie na Vsesoyuznoj konferentsii «Ispol'zovanie metodov optimizatsii v tekushhem planirovanii i operativnom upravlenii proizvodstvom» (Moskva, 17–19 oktyabrya 1979 g.). M.: VNIISI; 12–21.
- Kantorovich L.V. 1987. Moj put' v nauke. *Uspekhi matematicheskikh nauk* **42** (2): 183–213.
- Kantorovich L.V. 2011. *Matematiko-ekonomicheskie raboty*. Novosibirsk: Nauka.
- Kantorovich L.V. 2012a. *Ekonomika i matematika: Izbrannoe*. SPb.: Nestor-Istoriya.
- Kantorovich L.V. 2012b. *Matematicheskie metody organizatsii i planirovaniya proizvodstva*. (Reprintnoe izdanie k 100-letiyu so dnya rozhdeniya Leonida Vital'evicha Kantorovicha). Sost. I.V. Romanovskij. SPb.: Izdat. Dom. SPbGU.
- Kantorovich L.V., Zalgaller V.A. 1971. *Ratsional'nyj raskroj promyshlennykh materialov*. 2-e izd. (1-e izd. — 1951). Novosibirsk: Nauka.
- Kantorovich L.V., Zalgaller V.A. 2012. *Ratsional'nyj raskroj promyshlennykh materialov*. 3-e izd., ispr. i dopoln. SPb.: Nevskij dialekt.
- Kantorovich L.V., Makarov V.L. 1965. Optimal'nye modeli perspektivnogo planirovaniya. V sb.: *Primenenie matematiki v ekonomicheskikh issledovaniyakh*. T.III. M.: Mysl'.
- Kantorovich L.V., Makarov V.L. 1984. Tseny i ehffektivnost' proizvodstva. *Ekonomika i matematicheskie metody* **20** (1): 28–41.
- Kantorovich L.V., Romanovskij I.V. 1985. Generirovanie stolbtsov v simpleks-metode. *Ekonomika i matematicheskie metody* **21** (1): 128–138.
- Kaplan R.S., Norton D.P. 2004. Sbalansirovannaya sistema pokazatelej, opredelyayushhikh ehffektivnost' raboty organizatsii. Per. s angl. *Rossijskij zhurnal menedzhmenta* **2** (3): 70–90.
- Katkalo V.S. 2003. Metodologicheskie osobennosti i priority razvitiya resursnoj kontseptsii strategicheskogo upravleniya. *Ekonomicheskaya nauka sovremennoj Rossii* (2): 71–80.
- Katkalo V.S. 2006. *Ehvoljutsiya teorii strategicheskogo upravleniya*. SPb.: Izd. dom SPbGU.
- Klassiki ekonomicheskoy mysli*. 2008. Sostavitel': Anan'in O.I. Redkollegiya: Avtonomov V.S., Makasheva N.A., Gloveli G.D., Latov Yu.V.M.: Directmedia Publishing.
- Kutateladze S.S. (red.). 2012. *Leonid Vital'evich Kantorovich (1912–1986): Bibliograficheskij ukazatel'*. Novosibirsk: Izd-vo I-ta matematiki.
- Leonid Vital'evich Kantorovich. Material podgotovlen k publikatsii V.L. Kantorovichem. 1999. *Ekonomika i matematicheskie metody* **35** (3): 25–42.
- Leonov G.A., Katkalo V.S., Bukhvalov A.V. (red.). 2010. *Leonid Vital'evich Kantorovich: matematika, menedzhment, informatika*. SPb.: Izd-vo «Vysshaya shkola menedzhmenta».
- Linejnye neravenstva i smezhnye voprosy*. 1959. Sb. statej pod redaktsiej G.U. Kuna i A.U. Takker. S prilozheniem knigi S. Vajda «Teoriya igr i linejnoe programmirovaniye». Sbornik perevodov s angl. pod redaktsiej L.V. Kantorovicha i V.V. Novozhilova. M.: Izd-vo inostrannoj literatury.
- Lasdon L.S. 1975. *Optimizatsiya bol'shikh sistem*. Per. s angl. pod red. A.A. Pervozvanskogo. M.: Fizmatgiz.
- Makarov V.L. 2009. Obzor matematicheskikh modelej ekonomiki s innovatsiyami. *Ekonomika i matematicheskie metody* **45** (1): 3–14.
- Makarov V.L. 2011. Kantorovich — universal'nyj genij. *Ekonomika i matematicheskie metody* **47** (4): 3–6.
- Makarov V.L., Kleiner G.B. 2007. *Mikroekonomika znaniy*. M.: Ekonomika.

- Moiseev N. N. 1979. *Matematika stavit eksperiment*. M.: Nauka.
- Novozhilov V. V. 1967. *Problemy izmereniya zatrat i rezul'tatov pri optimal'nom planirovanii*. M.: Ekonomika.
- Novozhilov V. V. 1995. *U istokov podlinnoj ekonomicheskoy nauki*. M.: Nauka.
- Pospelov G. S., Irikov V. A. 1976. *Programmno-tselevoe planirovanie i upravlenie*. M.: Sovetskoe radio.
- Romanovskij I. V. 2010. Leonid Vital'evich Kantorovich: nekotorye cherty nauchnoj biografii. V kn.: Leonov G. A., Katkalo V. S., Bukhvalov A. V. (red.). *Leonid Vital'evich Kantorovich: matematika, menedzhment, informatika*. SPb.: Izd-vo «Vysshaya shkola menedzhmenta»; 9–38.
- Saaty T. L. 2011. *Prinyatie reshenij pri zavisimostyakh i obratnykh svyazyakh*. 3-e izd. Per. s angl. M.: URSS.
- Chase R. B., Aquilano N., Jakobs R. F. 2001. *Proizvodstvennyj i operatsionnyj menedzhment*. 8-e izd. Per. s angl. M.: Izdat. dom «Vil'yams».
- Chumachenko N. G. 1971. *Uchet i analiz v promyshlennom proizvodstve SSHA*. M.: Finansy.
- Euler L. 1934. *Metod nakhozheniya krivykh linij, obladayushhikh svojstvami maksimuma, libo minimuma ili reshenie izoperimetriceskoj zadachi, vzyatoj v samom shirokom smysle*. Per. s lat. M-L.: AN SSSR.

*Статья поступила в редакцию
9 июля 2012 г.*