УПРАВЛЕНИЕ ЦЕНОЙ ПРОДАЖ ВЫСОКОЛИКВИДНОГО АКТИВА ПРИ ЗАДАННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ ПО ОБЪЕМУ

С.А.ВАВИЛОВ
Экономический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия[а]

К.В.СВЕТЛОВ
Высшая инженерно-экономическая школа, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия[б]

Т.А.ПУСТОВАЛОВА
Институт «Высшая школа менеджмента», Санкт-Петербургский государственный университет, Россия[в]

Цель исследования: разработка модели управления, обеспечивающей увеличение средневзвешенной цены продаж. В статье рассматривается стратегия распродажи высоколиквидного актива, торгуемого по рыночным ценам. **Методология исследования:** методология базируется на аппарате теории случайных процессов и стохастических дифференциальных уравнений. Основываясь на предпосылке о том, что рыночные цены актива следуют диффузионному процессу, у которого коэффициенты сноса и волатильности являются случайными функциями времени, строится модель управления продажами. Ее важной особенностью является то, что в качестве обратной связи в управлении выступают только цены совершаемых биржевых сделок. **Результаты исследования:** модель управления, предложенная в настоящем исследовании, позволяет продавцу хеджировать резкие падения рыночных цен за счет искусственного повышения средневзвешенной цены продаж, обусловленного осуществлением спекулятивной торговой стратегии. **Оригинальность и вклад авторов:** исследование представляет собой развитие подхода, связанного с увеличением средневзвешенной цены продаж высоколиквидного актива. В отличие от модели управления, предложенной ранее, в работе

Адреса организаций: [а] Экономический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, Чайковского ул., 62, Санкт-Петербург, 191123, Россия; [б] Высшая инженерно-экономическая школа, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Политехническая ул., 29, Санкт-Петербург, 195251, Россия; [в] Институт «Высшая школа менеджмента», Санкт-Петербургский государственный университет, Волховский пер., 3, Санкт-Петербург, 199004, Россия.

https://doi.org/10.21638/spbu18.2023.102

приведены ограничения как на минимальное количество активов, обязательных для реализации, так и на максимально допустимое количество активов, разрешенных к продаже. Показаны примеры виртуальной торговли на реальных мировых площадках, демонстрирующие влияние накладываемых ограничений на величины средневзвешенных цен.

Ключевые слова: случайный процесс, управление продажами, планирование продаж, хеджирование рисков, управление ценой продаж.

JEL: G11, C14, C65.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее исследование посвящено разработке подхода к управлению продажами высоколиквидного актива при заданном ограничении на минимальный объем продаж, а также при установленном целевом уровне объемов реализации актива. Задачей предложенного метода является хеджирование дохода продавца от резкого падения рыночной цены торгуемого актива путем увеличения средневзвешенной цены продаж. Его применение на мировых торговых площадках показано в [Вавилов, Кузнецов, 2019] на примере виртуальной торговли газовыми контрактами на специализированных товарных биржах.

В данном понимании этот подход может рассматриваться как своеобразная альтернатива ряду других инструментов хеджирования, таких как форвардные, фьючерсные или опционные контракты. Вместе с тем представленная ранее модель предполагала построение управления без учета некоторого минимального количества актива, подлежащего обязательной реализации на конкретном временном интервале. В этой ситуации достигнутая высокая средневзвешенная цена могла бы приходить в противоречие с заведомо недостаточно высоким количеством его реализации. Таким образом, требуется постановка актуальной задачи увеличения средневзвешенной цены продаж конкретного актива при заданных минимальных и максимальных количествах его реализации на определенном временном горизонте.

Цель статьи — разработка алгоритма, учитывающего ограничения на минимально требуемый объем реализации актива, а также на определенный целевой уровень величины продаж.

Задачи, которые решаются в исследовании, состоят в формализации возможных ограничений на минимальный объем продаж и построении модели управления, учитывающей данные ограничения.

Статья имеет следующую структуру. В первом разделе представлен краткий обзор литературы по вопросам хеджирования и описана связь настоящего исследования с предыдущими работами. Во втором изложена формализованная постановка задачи управления процессом продаж актива при заданных ограничениях на минимальную величину его продаж. В третьем выводятся основные соотношения для предложенной модели в контексте подхода к управлению портфелем активов и формулируется теорема, дающая формулы для определения необходимого объема продаж, а также осуществляется качественный анализ полученного соотношения для средневзвешенной цены. В четвертом рассматривается применение методики, приводятся практические рекомендации по выбору функции управления. В пятом разделе продемонстрированы выводы исследования. В заключении сформулировано краткое резюме полученных результатов.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Вопросы управления рисками, в том числе рисками изменения цен, естественным образом возникают в области экономики и финансов. Согласно исследованию [Smithson, Simkins, 2005], подавляющее большинство компаний использует стратегии риск-менеджмента (например, покупку или продажу деривативов) для снижения подверженности рискам и максимизации стоимости компаний.

Наиболее популярный способ хеджирования изменения цен на активы состоит в использовании фьючерсных или форвардных контрактов, цены которых сильно коррелированы с ценой актива. В случае, когда компания стремится снизить риски изменения цен определенного товара, но рынка фьючерсных контрактов для этого базисного актива не существует, можно прибегнуть к использованию фьючерсов на связанные товары, движение цен по которым сильно коррелирует с ценой, которую требуется захеджировать. Например, в [Morrell, Swan, 2006] рассматриваются различные аспекты хеджирования цен на авиационное топливо, в том числе при помощи фьючерсов на нефть. В [Wang et al., 2015] сравниваются подходы к построению оптимального хеджирования с использованием фьючерсов, и авторы приходят выводу о том, что без учета трансакционных издержек использование наивной стратегии, подразумевающей коэффициент хеджирования равным 1, часто является оптимальным выбором.

Необходимо отметить, что существуют исследования, посвященные математическим аспектам хеджирования рисков, прежде всего связанных с изменением цен на производные финансовые инструменты (см., напр.: [Cvitanić, Karatzas, 1996; Föllmer, Leukert, 2000]). Стратегии хеджирования при этом включают квадратичное хеджирование [Schweizer, 1999], квантильное хеджирование [Föllmer, Leukert, 1999] и многие другие. В данном случае существенное значение имеет знание вероятностных распределений цен базовых активов либо принципиальная возможность построения их устойчивых оценок. Также в последние годы активно развиваются подходы, связанные с использованием нейронных сетей для хеджирования портфелей производных финансовых инструментов (см., напр.: [Buehler et al., 2019]).

Настоящая статья является логическим продолжением и обобщением результатов исследования [Вавилов, Кузнецов, 2019] с сохранением всех введенных в нем обозначений и понятий, а также опирается на ранее разработанную стратегию реинвестирования [Vavilov, 2001; Vavilov, Ermolenko, 2007; 2008; Вавилов, Ермоленко, 2016; Вавилов, Кузнецов, 2019] в противоположность общепринятым подходам, основанным на схемах «самофинансирования» и «управления портфелем с потреблением» [Флеминг, Ришель, 1978; Ширяев, 1998; Karatzas, 1997; Shreve, 2004].

Указанные схемы широко используются и развиваются в рамках стохастической теории финансов, о чем свидетельствует большое количество публикаций (см., напр.: [Ruf, 2013; Bayer, Friz, Gatheral, 2016; Euch, Rosenbaum, 2018; Buehler et al., 2019]) в высокорейтинговых журналах. Важно подчеркнуть, что в рамках отмеченных стратегий, используемых при управлении инвестиционным портфелем, решаются, как правило, классические оптимизационные задачи. Это требует детальной информации о коэффициентах соответствующих модельных стохастических уравнений, описывающих динамику цены, причем в режиме реального времени.

Для решения прикладных задач на современных финансовых рынках указанное условие является неприемлемым. В то же время при реализации схемы реинвестирования в качестве обратной связи выступают только цены совершаемых биржевых сделок. Используемая при этом информация о величине волатильности носит исключительно оценочный характер, и ее значение непосредственно в построении самого управления не используется. Разумеется, о решении привычных оптимизационных задач в рамках настоящего исследования речь не идет. Однако, например, в нем ставится вопрос о реализации определенного алгоритма, обеспечивающего увеличение средневзвешенной цены продаваемых активов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ПРОДАЖ АКТИВА

Для построения модели управления активом необходимо сделать предположение о том, что цена высоколиквидного актива может описываться при помощи диффузионного процесса, который включает в себя в качестве частного варианта популярный в приложениях процесс геометрического броуновского движения.

Будем исходить из того, что на заданном промежутке времени $\left[0,T\right]$ цены рыночных сделок $x_t,\ t\in\left[0,T\right]$ относительной единицы рассматриваемого актива удовлетворяют следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dx_t = c\left(t,x_t\right)dt + \sigma_t x_t dW_t, \tag{1}$$

где $\sigma_t = \sigma\left(t,\omega\right)$ — коэффициент волатильности, представляющий собой, строго говоря, случайную функцию времени, не зависящую от x_t; W_t — стандартный винеровский процесс [Оксендаль, 2003]; структура коэффициента сноса $c\left(t,x_t\right)$ не требует отдельной спецификации, однако предполагается, что реализация случайного процесса x_t не принимает отрицательных значений с вероятностью 1 и, кроме того, задача Коши для данного уравнения имеет единственное сильное решение [Бородин, 2013].

Вопрос о возможности применения выбранной модели цены для рассматриваемой задачи управления подробно обсуждается в [Вавилов, Кузнецов, 2019]. Результаты проверки, состоявшей в сравнении теоретической величины прибыли, зависящей от конкретного выбора ценовой модели для торгуемого актива, и фактической величины прибыли, рассчитываемой на основе значений продаж и реально наблюдаемых рыночных цен, показали, что отклонения данных величин являются небольшими[1] для ликвидных активов, торгуемых на рынке. Таким образом, с практической точки зрения использование модели (1) в задаче управления продажами высоколиквидного актива является оправданным.

Обозначим количество активов, проданных на промежутке времени $\left[0,t\right]$, через a_t, при этом везде в дальнейшем занимаемая позиция будет рассматриваться как короткая и, соответственно, $a_t \le 0$, причем $a_0 = 0$. Кроме того, наблюдаемые реализации случайных процессов будут обозначаться теми же буквами, но только с волнами, например x_t, a_t и $\tilde{x}_t$, $\tilde{a}_t$. Под средневзвешенной *av* (weighted average) ценой продаж продавца на временном отрезке $\left[0,T\right]$ понимается величина:

$$\tilde{x}_T^{av} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\tilde{V}_T}{\tilde{a}_T}, \tag{2}$$

где V_T — количество денег, вырученных за время $\left[0,T\right]$.

В качестве цели управления выступает построение функции $\tilde{a}_t,\ t\in\left[0,T\right]$, обеспечивающей выполнение условия:

$$\tilde{x}_T^{av} > \max_{t\in\left[0,T\right]} \tilde{x}_t. \tag{3}$$

В данном случае при построении управления $\tilde{a}_t$ в качестве обратной связи могут

[1] В частности, при использовании intraday-котировок и применении модели к высоколиквидным активам из категории «голубых фишек» величина ошибки составляла менее 1%. При проведении расчетов исключительно по ценам закрытия и задействовании модели для осуществления торгов в газовой отрасли на Европейской энергетической бирже ошибка не превышала 7%.

использоваться только рыночные цены на отрезке времени $\left[0,t\right]$. Иными словами, следует исходить из того, что коэффициенты в уравнении (1) не поддаются оценке в реальном времени с нужной степенью точности. Интуитивно понятно, что условие (3) может выполняться только за счет нарастания спекулятивной прибыли в процессе постепенного реинвестирования денег, вырученных от продажи актива, с учетом динамики его рыночной цены.

В отличие от работы [Вавилов, Кузнецов, 2019], нами накладывается дополнительное ограничение на минимальное количество рассматриваемого актива, обозначаемого через A и подлежащего реализации на временном промежутке $\left[0,T\right]$. Для того чтобы учесть последнее ограничение, существуют различные возможности.

В исследовании постановка задачи уточняется путем задания обязательного минимального количества продаваемых активов A_t на временном отрезке $\left[0,t\right]$, исходя из соотношения:

$$A_t = A\cdot\left(\frac{t}{T}\right)^{\varepsilon}, \qquad (4)$$

где $\varepsilon \geq 1$ — заданный параметр; $A>0$.

Следовательно, ограничение, накладываемое на управление, принимает такой вид:

$$a_t \leq -A\cdot\left(\frac{t}{T}\right)^{\varepsilon}.$$

В предельном случае, когда $\varepsilon \to +\infty$, получаем, что:

$$A_t = \begin{cases} 0, & t<T \\ A, & t=T. \end{cases}$$

Значит, если в момент времени T количество проданного актива составляет величину, меньшую, чем A, то принудительная продажа недостающего количтва осуществляется по рыночной цене $\tilde{x}_T$.

Еще один предельный случай имеет место при выполнении условия $\varepsilon=0$, т.е. $A_t = A$ при $0\leq t\leq T$, что соответствует сохранению минимального количества A проданного актива на всем временном промежутке от 0 до T.

В рамках предположения о том, что цена торгуемого актива следует уравнению (1), и при ограничении, когда минимальный объем актива к реализации задается функцией A_t, частными случаями которой являются равномерная реализация минимального объема либо закрытие плана в режиме deadline, далее представлено построение модели управления, способной обеспечить выполнение условия (3).

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ АКТИВОВ

Дальнейшее исследование основывается на модели управления, первоначально предложенной в [Vavilov, 2001] и получившей развитие в публикациях [Vavilov, Ermolenko, 2007; 2008; Вавилов, Ермоленко, 2016]. Представленные рассуждения будут основываться на конструкции, специально разработанной для короткой позиции $a_t \leq 0$, с сохранением обозначений, имеющихся в статье [Вавилов, Кузнецов, 2019].

Так, стоимость портфеля, обозначенная через f_t, и ее стохастический дифференциал определяются следующим образом:

$$f_t = a_t x_t + m_t,\ f_0 = 0, \qquad (5)$$

$$df_t = a_t dx_t + l\left(t,x_t\right)dt, \qquad (6)$$

где m_t — измеримая случайная функция времени, отвечающая объему средств, полученному в результате текущих продаж; $l\left(t,x_t\right)$ интерпретируется как функция управления, регулирующая денежный поток, образующийся в результате текущих продаж актива без учета спекулятивных операций. Соответственно:

$$m_t = \int_0^t l\left(s,x_s\right)ds - \int_0^t x_{s+ds}da_s, \qquad (7)$$

где $x_{t+dt} \overset{def}{=} x_t + dx_t$.

При этом количество вырученных денег V_t вычисляется, исходя из формулы [Вавилов, Кузнецов, 2019]:

$$V_t = -\int_0^t x_{s+ds} da_s. \quad (8)$$

Поясним экономический и математический смысл последнего интеграла. Пусть в моменты времени $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $t_1 > 0$ осуществляется покупка или продажа рассматриваемого актива в размере $\Delta a_{t_1}, \ldots \Delta a_{t_n}$, $\Delta a_{t_i} = a_{t_i} - a_{t_{i-1}}$. Продажа в момент времени t_i соответствует тому, что $\Delta a_{t_i} < 0$, а покупка отвечает варианту $\Delta a_{t_i} > 0$. Поскольку в настоящей статье исследуется управление продажами, то выполняется условие $a_{t_i} = \sum_{j=1}^{i} \Delta a_{t_j} < 0$, $i = 1, \cdots, n$, означающее, что в любой момент времени t_i имеет место короткая позиция, т. е. $a_{t_i} < 0$.

Выручка от продаж в данном случае может быть вычислена как $-\sum_{i=1}^{n} x_{t_i} \Delta a_{t_i}$. Интеграл в выражении (8) представляет собой непрерывный аналог последнего выражения. Согласно обозначению x_{s+ds}, подынтегральная функция вычисляется на правом конце отрезка разбиения. Если x_{s+ds} заменить на x_s, то фактически это будет означать, что сделка осуществляется по «старой» цене. С математической точки зрения получаем:

$$\int_0^t x_{s+ds} da_s = \int_0^t x_s da_s + \int_0^t dx_s da_s.$$

Значит, исходный интеграл разбивается на сумму интегралов Ито [Оксендаль, 2003] и Римана [Фихтенгольц, 2002], при этом последний вычисляется вдоль траектории случайного процесса. Важно отметить, что аналогичное обозначение для второго слагаемого в последней формуле используется в [Вентцель, 1975, с. 232].

Спекулятивный доход p_t определяется соотношением [Вавилов, Кузнецов, 2019]:

$$p_t = a_t x_t - \int_0^t x_{s+ds} da_s. \quad (9)$$

Вместе с тем имеет место следующее представление указанной величины [Вавилов, Кузнецов, 2019]:

$$p_t = f_t - \int_0^t l\left(s, x_s\right) ds. \quad (10)$$

Необходимо отметить, что средневзвешенная цена, определяемая формулой (2), может быть явно выражена через спекулятивный доход:

$$\tilde{x}_T^{av} = -\frac{\tilde{V}_T}{\tilde{a}_T} = -\frac{\tilde{p}_T - \tilde{a}_T \tilde{x}_T}{\tilde{a}_T} = \tilde{x}_T - \frac{\tilde{p}_T}{\tilde{a}_T}. \quad (11)$$

Исходя из формулы Ито [Оксендаль, 2003], можно записать:

$$a_t = \frac{\partial f}{\partial x_t}\left(t, x_t\right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma_t^2 x_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_t^2} = l\left(t, x_t\right), \quad (13)$$

где $f_t = f\left(t, x_t\right)$ определена в (5), (6).

Следуя [Вавилов, Кузнецов, 2019], включим в рассмотрение безразмерный ценовой коридор $x_t \in \left(\beta, 1\right)$, где $\beta < 1$ — его нижняя граница, и сопутствующую задачу Штурма—Лиувилля:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{dx^2} + \dfrac{\lambda_1^2}{x^2}\varphi = 0 \\ \varphi'\left(\beta\right) = \varphi\left(1\right) = 0 \end{cases},$$

где первая собственная функция $\varphi\left(x\right) = \sqrt{x} \cdot \sin\left(b \cdot \ln x\right)$ и первое собственное число λ_1 $\left(\lambda_1 = 0.25 + b^2\right)$ определяются через минимальный положительный корень трансцендентного уравнения:

$$\tan\left(b \cdot \ln\beta\right) = -2b.$$

Важно пояснить, что введение указанного ценового коридора позволяет регулировать изменение количества актива в портфеле в зависимости от ценовой динамики для осуществления спекулятивных операций.

В рамках описанной модели можно сформулировать теорему, содержащую формулы для вычисления количества актива, проданного от начала процесса управления, а также величину теоретической прибыли, которая отвечает этим продажам. Величина теоретической прибыли далее будет использована для анализа получаемой средневзвешенной цены.

Теорема. Определим величину $\tilde{a}_t$ соотношением:

$$\tilde{a}_t = \int_0^t \frac{u(\tau)}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} d\tau \cdot \varphi'(\tilde{x}_t) - A_t, \qquad (\text{T}.1)$$

где $u(\tau) \geq 0$ — произвольная кусочно-непрерывная функция.

Тогда

$$\tilde{p}_t = \int_0^t \frac{u(\tau)}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} d\tau \cdot \varphi(\tilde{x}_t) - \\ - \int_0^t u(\tau) exp\left(-\frac{\lambda_1^2}{2}\int_\tau^t \tilde{\sigma}_s^2 ds\right) d\tau + \\ + \left\{\int_0^t \frac{\partial A_\tau}{\partial \tau} \cdot \tilde{x}_\tau d\tau - A_t \tilde{x}_t\right\}. \qquad (\text{T}.2)$$

Доказательство теоремы. Рассмотрим уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma_t^2 x_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_t^2} = l(t, x_t) \qquad (\text{T}.3)$$

и отвечающую ему начально-краевую задачу:

$$\begin{aligned} f(0, x_t) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_t}(t, x_t) &\to -A_t, \text{при } x_t \to \beta, \\ f(t, x_t) &\to 0, \text{при } x_t \to 1. \end{aligned} \qquad (\text{T}.4)$$

Граничные условия в (Т.4) носят следующий экономический смысл: в случае, когда цена стремится к нижней границе ценового коридора, управляющая система постепенно закрывает торговую позицию, за исключением части актива в количестве A_t единиц. В противоположном случае, когда цена приближается к верхней границе, деньги, вырученные в результате совершения торговых операций, реинвестируются в актив. Значит, $a_t \to -\frac{m_t}{x_t}$ и, следовательно, $f_t \to 0$.

Введем в рассмотрение новую функцию $g(t, x_t)$, определенную зависимостью:

$$g(t, x_t) = f(t, x_t) - A_t \cdot (1 - x_t).$$

Тогда задача (Т.3), (Т.4) может быть переформулирована следующим образом:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\sigma_t^2 x_t^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x_t^2} = l(t, x_t) - \frac{\partial A_t}{\partial t}(1 - x_t), \qquad (\text{T}.5)$$

$$\begin{aligned} g(0, x_0) &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial x_t}(t, x_t) &\to 0, \text{при } x_t \to \beta, \\ g(t, x_t) &\to 0, \text{при } x_t \to 1. \end{aligned} \qquad (\text{T}.6)$$

Полагая $l(t, x_t) = \frac{\partial A_t}{\partial t}(1 - x_t) + r(t)\varphi(x_t)$, где $r(t)$ — некоторая неотрицательная кусочно-постоянная функция, сводим задачу (Т.5), (Т.6) к уже решенной в [Вавилов, Кузнецов, 2019], при условии что $\sigma_t = \sigma(t, \omega)$ не зависит от x_t.

Окончательно, как и в указанной работе, осуществляя переход к кусочно-непрерывной неотрицательной функции управления $u(t)$, обеспечивающей в явном виде независимость a_t от волатильности σ_t, приходим к искомым соотношениям (Т.1), (Т.2). **Теорема доказана.**

Представим ряд важных замечаний к теореме.

Замечание 1. Из формулы (Т.1) видно, что в силу свойств функции $\varphi(x)$ ($\varphi(\tilde{x}_\tau) > 0$, $\varphi'(\tilde{x}_t)$ <0, при этом $u(\tau) \geq 0$) количество проданного актива не может быть меньше величины A_t на каждый момент времени t.

Замечание 2. Указанный ценовой коридор $(\beta, 1)$ может быть расширен в случае необходимости. Такая ситуация может возникнуть, если наблюдаемое значение цены $\tilde{x}_t$ «пробивает» одну из границ коридора. Выход из данной ситуации заключается в построении новой управляющей функции $u(\tau)$, отвечающей расширенному ценовому коридору на основе решения уравнения Вольтерры первого рода [Вавилов, Кузнецов, 2019].

Воспользуемся результатом теоремы для анализа получающейся средневзвешенной цены продаж. Также исследуем, как получаемая цена будет зависеть от вида ограничений на минимальной объем продаваемого товара. Используя зависимости (11), (Т.1), (Т.2), можно записать явную формулу для средневзвешенной цены на момент времени T:

$$\tilde{x}_T^{av} = \tilde{x}_T + \frac{\int_0^T \frac{u(\tau)}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} d\tau \cdot \varphi(\tilde{x}_t)}{A - \int_0^T \frac{u(\tau)}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} d\tau \cdot \varphi'(\tilde{x}_t)} - \\ -\frac{\int_0^T u(\tau) \exp\left(-\frac{\lambda_1^2}{2}\int_\tau^T \tilde{\sigma}_s^2 ds\right) d\tau}{A - \int_0^T \frac{u(\tau)}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} d\tau \cdot \varphi'(\tilde{x}_t)} + \\ + \frac{\left\{\int_0^T \frac{\partial A_\tau}{\partial \tau} \cdot \tilde{x}_\tau d\tau - A\tilde{x}_T\right\}}{A - \int_0^T \frac{u(\tau)}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} d\tau \cdot \varphi'(\tilde{x}_t)}. \qquad (14)$$

Выражение $\left\{\int\limits_0^T \frac{\partial A_\tau}{\partial \tau} \cdot \tilde{x}_\tau d\tau - A\tilde{x}_T\right\}$ и величина A в знаменателе обусловлены ограничениями, наложенными на минимальное количество актива, подлежащего реализации. Примечательно, что отсутствие спекулятивных операций, означающее выбор функции $u(\tau) \equiv 0$ в зависимости (14), приводит к тому, что торговля будет осуществляться в соответствии с намеченным графиком продаж. Как следствие, средневзвешенная цена определяется зависимостью:

$$\tilde{x}_T^{av} = \frac{\int_0^T \frac{\partial A_\tau}{\partial \tau} \cdot \tilde{x}_\tau d\tau}{A}. \qquad (15)$$

Отметим, что выражение $\left\{\int\limits_0^T \frac{\partial A_\tau}{\partial \tau} \cdot \tilde{x}_\tau d\tau - A\tilde{x}_T\right\}$ из формулы (14) может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от динамики текущих цен $\tilde{x}_\tau$ по отношению к финальной $\tilde{x}_T$. Одновременно сумма первых двух слагаемых в числителе демонстрирует стабильный рост средневзвешенной цены во времени и с увеличением волатильности.

В предельном случае, когда $\varepsilon \to +\infty$, выражение $\left\{\int\limits_0^T \frac{\partial A_\tau}{\partial \tau} \cdot \tilde{x}_\tau d\tau - A\tilde{x}_T\right\}$ исчезает и в итоге получается соотношение:

$$\tilde{x}_T^{av} = \tilde{x}_T + \frac{\int_0^T \frac{u(\tau)}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} d\tau \cdot \varphi(\tilde{x}_t)}{A - \int_0^T \frac{u(\tau)}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} d\tau \cdot \varphi'(\tilde{x}_t)} - \\ -\frac{\int_0^T u(\tau) \exp\left(-\frac{\lambda_1^2}{2}\int_\tau^T \tilde{\sigma}_s^2 ds\right) d\tau}{A - \int_0^T \frac{u(\tau)}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} d\tau \cdot \varphi'(\tilde{x}_t)}. \qquad (16)$$

Из (16) видно, что спекулятивный доход в указанном случае не зависит от A. Тем не менее величина A, соответствующая минимальному количеству продаж на временном горизонте $[0,T]$, входит в знаменатель формулы (16), уменьшая таким образом влияние спекулятивного дохода на рост средневзвешенной цены продаж.

Наконец, в предельном случае, когда минимальное количество проданного актива A сохраняется на всем времени управления, получаем:

$$\tilde{x}_T^{av} = \tilde{x}_T + \frac{\int_0^T \frac{u(\tau)}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} d\tau \cdot \varphi(\tilde{x}_t)}{A - \int_0^T \frac{u(\tau)}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} d\tau \cdot \varphi'(\tilde{x}_t)} -$$

$$-\frac{\int_0^T u(\tau)\exp\left(-\frac{\lambda_1^2}{2}\int_\tau^T \tilde{\sigma}_s^2 ds\right)d\tau}{A-\int_0^T \frac{u(\tau)}{\varphi(\tilde{x}_\tau)}d\tau\cdot\varphi'(\tilde{x}_t)}+$$

$$+\frac{A\cdot(\tilde{x}_0-\tilde{x}_T)}{A-\int_0^T \frac{u(\tau)}{\varphi(\tilde{x}_\tau)}d\tau\cdot\varphi'(\tilde{x}_t)}. \qquad (17)$$

В данном варианте, как и в формуле (14), числитель во втором слагаемом может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от соотношения цены на начало и на конец торгов. Важно, что при выборе $A_t \equiv 0$, т.е. при отсутствии минимальных ограничений на величину продаж, получаемый результат будет аналогичен результату, представленному в [Вавилов, Кузнецов, 2019]. Как легко убедиться, в этом случае при выборе постоянной функции управления $u(\tau) \equiv u$ значение средневзвешенной цены продаж из формулы (14) не будет зависеть от величины u_0. Количество проданного товара и получаемая прибыль при этом, безусловно, сохранят зависимость от u_0.

ВЫБОР ФУНКЦИИ УПРАВЛЕНИЯ

Методика выбора функции управления

Рассмотрим вопрос о выборе управляющей функции в ситуации, когда кроме минимально необходимого объема актива для продаж требуется учесть и ограничение на максимально возможный объем продаж. Также продемонстрируем, как выбор ценового коридора и формы ограничений на минимальный объем могут влиять на результаты управления — получаемую средневзвешенную цену продаж.

Выберем в формуле (Т.1) в качестве управляющей функцию $u(\tau)=\varphi(\tilde{x}_\tau)u_1(\tau)$. Соответственно, вместо (Т.1) запишем:

$$\tilde{a}_t=\int_0^t u_1(\tau)d\tau\cdot\varphi'(\tilde{x}_t)-A_t.$$

На основе анализа трансцендентного уравнения, осуществленного в [Вавилов, Кузнецов, 2019], получаем:

$$\left|\varphi'(\tilde{x}_t)\right|<\left|\varphi'(1)\right|<\frac{\pi}{2\left|\ln\beta\right|}.$$

Исходя из запасов продавца, обозначим через A_{target} максимальное количество актива, подлежащего реализации. Выберем функцию управления $u_1(\tau)$ в качестве постоянной с учетом соотношения:

$$A_{target}=T\cdot u_1\cdot\left|\frac{\pi}{2\ln\beta}\right|+A$$

и, соответственно,

$$u_1=\frac{A_{target}-A}{\left|\frac{\pi}{2\ln\beta}\right|},$$

при этом величина спекулятивного дохода также изменится в связи с изменением функций управления:

$$\tilde{p}_t=\int_0^t u_1 d\tau\cdot\varphi(\tilde{x}_t)-$$

$$-\int_0^t u_1\cdot\varphi(\tilde{x}_\tau)\exp\left(-\frac{\lambda_1^2}{2}\int_\tau^t\tilde{\sigma}_s^2 ds\right)d\tau+$$

$$+\left\{\int_0^t\frac{\partial A_\tau}{\partial\tau}\cdot\tilde{x}_\tau d\tau-A_t\tilde{x}_t\right\}.$$

Выбор указанной функции гарантирует, что при управлении в автоматическом режиме количество проданного актива на момент завершения торговых операций будет находиться в диапазоне $[A, A_{target}]$.

Пример выбора функции управления

В качестве примера предложенного управления рассмотрим котировки криптовалюты Bitcoin относительно доллара США в период с 16 марта по 16 июня 2021 г.[2]

[2] Yahoo Finance. URL: https://finance.yahoo.com/quote/BTC-USD (дата обращения: 30.01.2023).

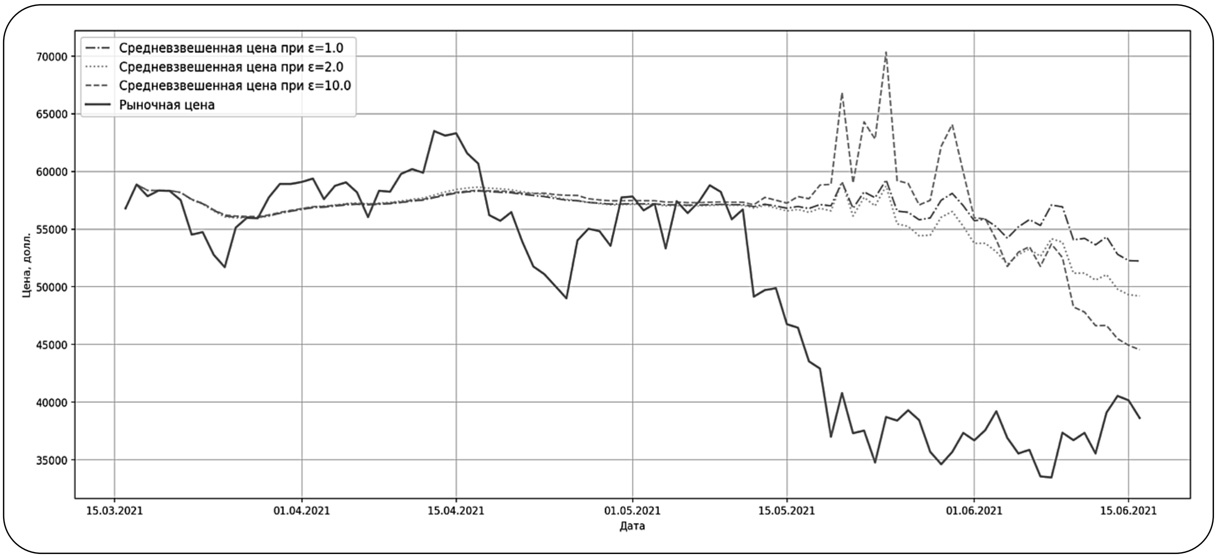

Рис. 1. Средневзвешенная цена продаж $\tilde{x}_t^{av}$ для различных значений ε, A_{target} = 1000, A = 500, 16.03.2021–16.06.2021

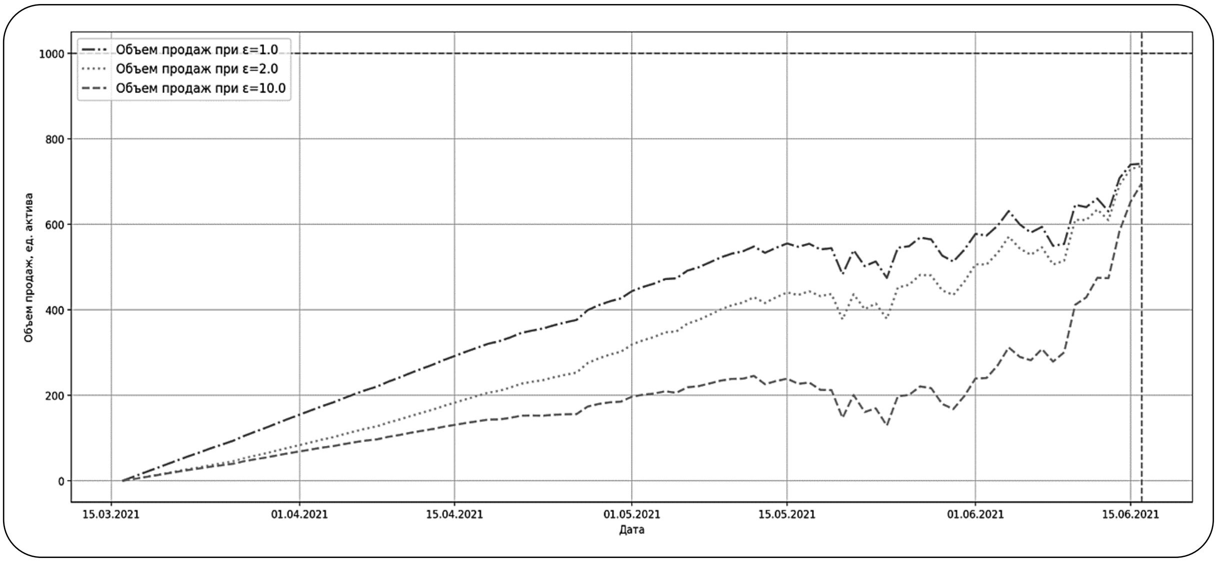

Рис. 2. Количество проданного актива $\left|\tilde{a}_t\right|$ для различных значений ε, A_{target} = 1000, A = 500, 16.03.2021–16.06.2021

Ценовой коридор для Bitcoin выбран как (30 000 долл., 65 000 долл.). Максимальное количество продаваемого актива составляет величину $A_{target} = 1000$ btc., минимальное количество, обязательное для реализации, — $A = 500$ btc.

Реализация управления при A_{target} = = 1000 и $A = 500$ для различных значений ε продемонстрирована на рис. 1. На рис. 2 показана динамика объема фактических продаж при данных параметрах. Рис. 3 и 4 аналогичны рис. 1 и 2 за исключением того, что количество актива для обязательной реализации выбрано существенно меньшим, а именно: $A = 100$.

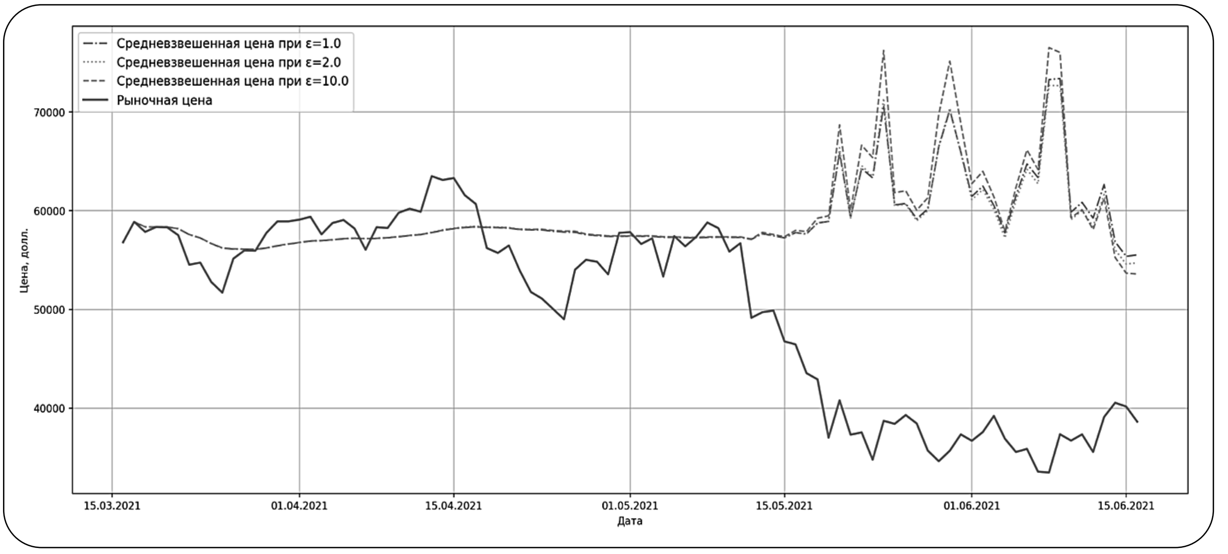

Рис. 3. Средневзвешенная цена продаж $\tilde{x}_t^{av}$ для различных значений ε, A_{target} = 1000, A = 100, 16.03.2021–16.06.2021

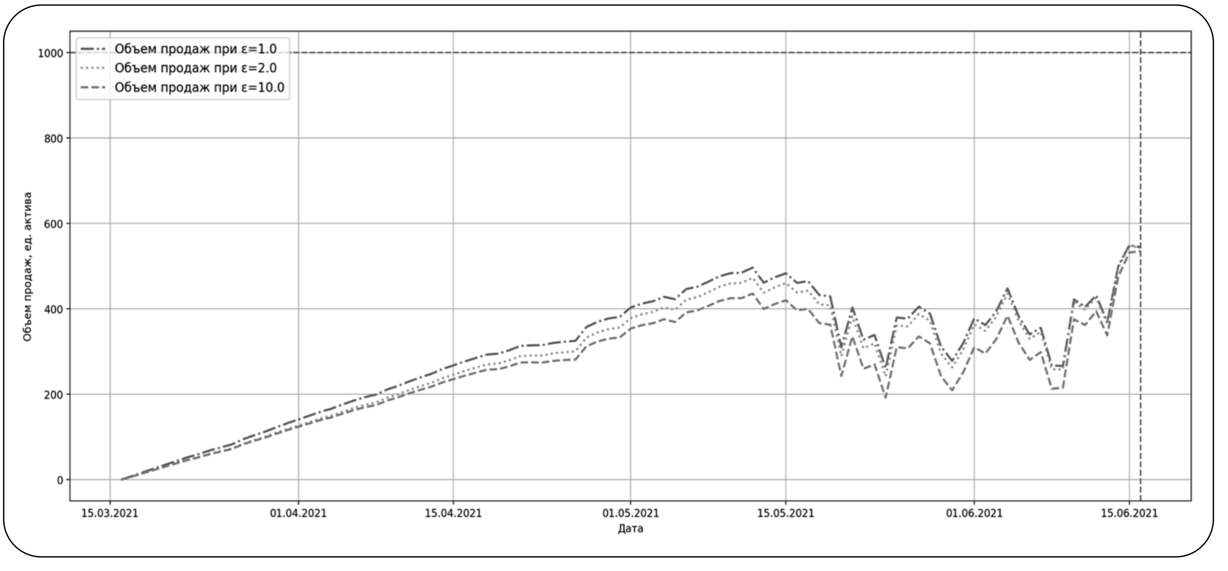

Рис. 4. Количество проданного актива $\left|\tilde{a}_t\right|$ для различных значений ε, A_{target} = 1000, A = 100, 16.03.2021–16.06.2021

Необходимо отметить, что при расширении ценового коридора предложенное управление продажами будет ожидаемо снижать свою эффективность. Для представленного выше примера рассмотрим случай, когда параметры управления по-прежнему заданы как $A_{target} = 1000$ btc. и $A = 500$ btc., а в качестве ценового коридора для Bitcoin выбран интервал (10 000 долл., 70 000 долл.).

Реализация управления при A_{target} = = 1000 btc., $A = 500$ btc., ценовом коридоре (10 000 долл., 70 000 долл.) и различных значениях ε продемонстрирована на

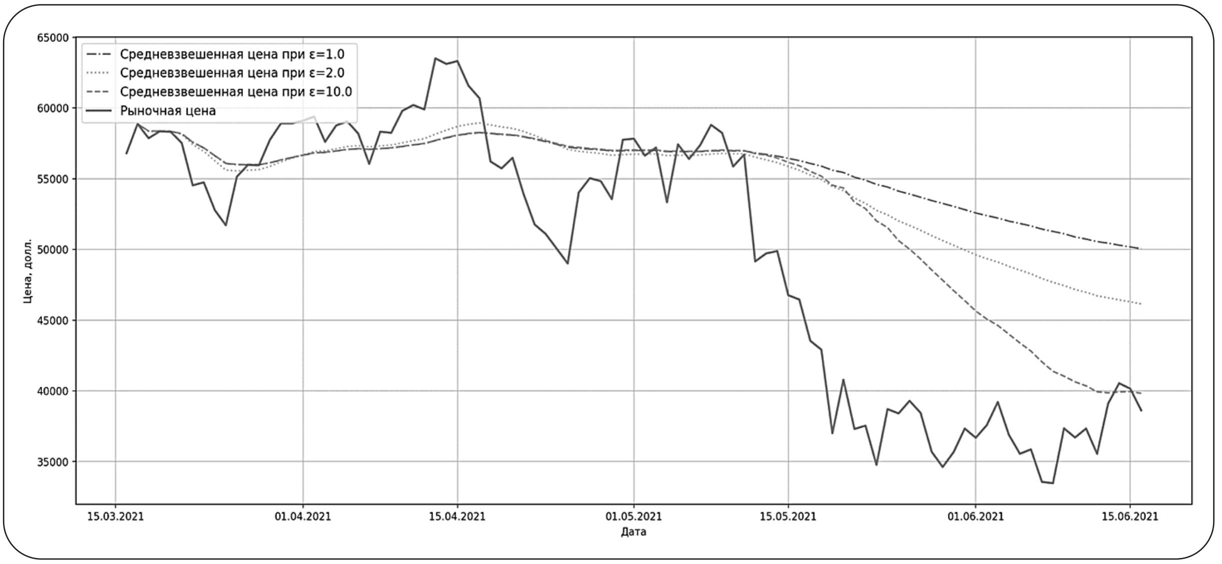

Рис. 5. Средневзвешенная цена продаж $\tilde{x}_t^{av}$ для различных значений ε, $A_{target} = 1000$, $A = 500$ и ценовом коридоре (10 000 долл., 70 000 долл.), 16.03.2021–16.06.2021

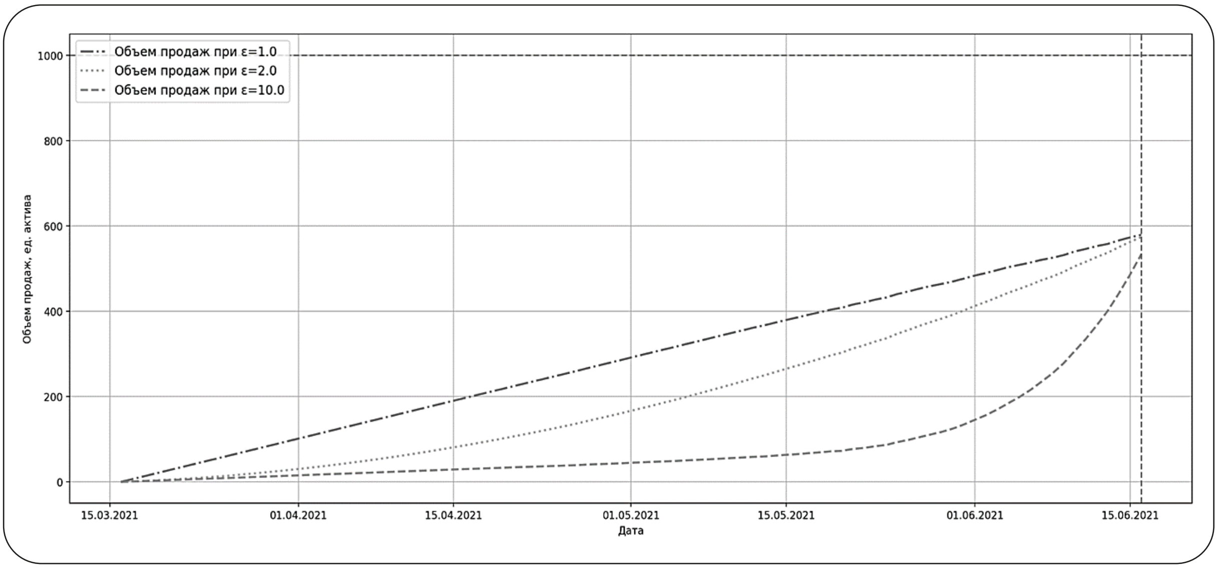

Рис. 6. Количество проданного актива $\left|\tilde{a}_t\right|$ для различных значений ε, $A_{target} = 1000$, $A = 500$ и ценовом коридоре (10 000 долл., 70 000 долл.),16.03.2021–16.06.2021

рис. 5, при этом рис. 6 содержит динамику объема фактических продаж.

На рис. 6 показано, что при стратегии, соответствующей параметру $\varepsilon = 1$, реализация минимального количества происходит равномерными темпами и получающаяся средневзвешенная цена продаж, изображенная на рис. 5, приближается к скользящему среднему. В этой связи не рекомендуется априори задавать ценовой коридор излишне широким, а вместо этого предлагается сделать его симметричным относительной первой совершенной системой управления сделки и далее воспользоваться процедурой его расширения, изложенной в [Вавилов, Кузнецов, 2019], в случае «пробития» его границ ценой.

ВЫВОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Модель управления, предложенная в исследовании, позволяет продавцу хеджировать резкие падения рыночных цен за счет искусственного повышения средневзвешенной цены продаж, обусловленного осуществлением спекулятивной торговой стратегии. Одновременно продавец может реализовать значительную часть своего актива, предназначенную для продажи на некотором временном горизонте, сохраняя при этом высокую средневзвешенную цену продаж. Однако необходимо иметь в виду, что чем меньшее количество единиц актива будет выбрано для обязательной реализации относительно его общего количества, предназначенного для продажи, тем, строго говоря, будет выше средневзвешенная цена по окончании торгов. Кроме того, предложенная модель управления может служить в качестве полезной альтернативы традиционным хеджирующим инструментам, в том числе и по причине их возможной низкой ликвидности и высокой цены. В частности, высокая волатильность стоимости базового актива, обусловленная нестабильностью рыночных цен, способна приводить к высокой стоимости опционов на подобные активы.

Следует подчеркнуть, что в статье не выдвигается и не решается оптимизационная задача. Кроме того, подобная постановка в принципе вряд ли возможна, поскольку коэффициенты базового стохастического уравнения не подлежат полной идентификации. Речь идет лишь о построении модели управления средневзвешенной ценой продаж, обеспечивающей, наряду с ростом времени и волатильности, ее рост с сохранением задаваемого минимального и максимального количества продаваемого актива в условиях падения рыночной цены. Именно построение такого управления и заявлено в теореме. Наряду с этим в статье осуществляется построение управлений, отвечающих его цели. В данном отношении вопрос о его единственности и возможности построения более «эффективного» управления в настоящей статье не рассматривается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В исследовании изложена модель управления продажами высоколиквидного товара в предположении о том, что его цена является диффузионным процессом с коэффициентом волатильности σ_t, не зависящим от цены x_t актива. Построенная модель управления способна учитывать имеющиеся у продавца ограничения на минимально необходимые объемы продаж, установленные на всем горизонте планирования. Кроме того, за счет специального выбора управляющей функции $u(\tau)$ возможно учесть и имеющиеся ограничения на максимально возможный объем продаж.

На примере торговли таким активом, как криптовалюта Bitcoin, в статье продемонстрирована эффективность предложенной модели управления, а также показано, как различные сочетания параметров (минимальный объем продаж, ширина ценового коридора) влияют на получающуюся средневзвешенную цену.

Вывод о том, что чем более узким является ценовой коридор, тем более эффективным получается управление с позиции роста величины средневзвешенной цены, является верным, однако не означает, что при использовании модели данный коридор требуется предугадывать. Априори он может быть задан в виде небольшого симметричного диапазона относительно наблюдаемой цены, а далее по мере необходимости расширяться при помощи процедуры, изложенной в [Вавилов, Кузнецов, 2019].

К ограничениям модели можно отнести то, что в своей текущей форме она позволяет решить вопрос управления ценой исключительно одного актива. В ситуации, когда деятельность компании подразумевает торговлю несколькими товарами, цены которых коррелирует друг с другом, интересным является вопрос об учете этого факта при построении модели, направленной на повышение цены продаж каждого из товаров. Дальнейшие направления развития предложенной модели также могут быть связаны с ее адаптацией для более широкого класса случайных процессов, описывающих поведение цены актива, в том числе процессов со скачками, а также процессов со стохастической волатильностью, допускающей зависимость от уровня цен.

ЛИТЕРАТУРА НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ

Бородин А. Н. 2013. *Случайные процессы*. СПб.: Лань.

Вавилов С. А., Ермоленко К. Ю. 2016. *Финансовая математика. Стохастический анализ*. М.: Юрайт.

Вавилов С. А., Кузнецов К. С. 2019. Стохастическая модель управления средневзвешенной ценой продаж производителя на товарных биржах. *Автоматика и телемеханика* (6): 142–155.

Вентцель А. Д. 1975. *Курс теории случайных процессов*. М.: Наука.

Оксендаль Б. 2003. *Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения*. М.: Мир.

Фихтенгольц Г. М. 2002. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. М.: Физматлит.

Флеминг У., Ришель Р. 1978. *Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами*. М.: Мир.

Ширяев А. Н. 1998. *Основы стохастической финансовой математики*. Том 1. М.: Фазис.

REFERENCES IN LATIN ALPHABET

Bayer C., Friz P., Gatheral J. 2016. Pricing under rough volatility. *Quantitative Finance* **16** **(**6): 887–904.

Buehler H., Gonon L., Teichmann J., Wood B. 2019. Deep hedging. *Quantitative Finance* **19** (8): 1271–1291.

Cvitanić J., Karatzas I. 1996. Hedging and portfolio optimization under transaction costs: A martingale approach 1 2. *Mathematical finance* **6** (2): 133–165.

Euch O. E., Rosenbaum M. 2018. Perfect hedging in rough Heston models. *The Annals of Applied Probability* **28** (6): 3813–3856.

Föllmer H., Leukert P. 1999. Quantile hedging. *Finance and Stochastics* **3**: 251–273.

Föllmer H., Leukert P. 2000. Efficient hedging: cost versus shortfall risk. *Finance and Stochastics* **4**: 117–146.

Karatzas I. 1997. *Lectures on the Mathematics of Finance*. AMS edition.

Morrell P., Swan W. 2006. Airline jet fuel hedging: Theory and practice. *Transport Reviews* **26** (6): 713–730.

Ruf J. 2013. Hedging under arbitrage. *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics* **23** (2): 297–317.

Schweizer M. 2001. A guided tour through quadratic hedging approaches. In: E. Jouini, J. Cvitanic and M. Musiela (eds). *Handbooks in Mathematical Finance: Option Pricing, Interest Rates and Risk Management*. Cambridge University Press: Cambridge.

Shreve S. E. 2004. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer: New York.

Smithson C., Simkins B.J. 2005. Does risk management add value? A survey of the evidence. *Journal of applied corporate finance* **17** (3): 8–17.

Vavilov S.A. 2001. On the probability models to control the investor portfolio. In: N. Balakrishnan, I.A. Ibragimov, V.B. Nevzorov (eds). *Asymptotic Methods in Probability and Statistics with Applications*, 535–547. Birkhauser: Boston.

Vavilov S.A., Ermolenko K.Y. 2007. *The Management of an Investment Portfolio in Financial Markets within the Framework of an Approach Alternative to Self-financing Strategy*, 1006–1009. World Congress on Engineering: London.

Vavilov S.A., Ermolenko K.Y. 2008. On the new stochastic approach to control the investment portfolio. *International Journal of Applied Mathematics* **38** (1): 54–62.

Wang Y., Wu C., Yang L. 2015. Hedging with futures: Does anything beat the naïve hedging strategy? *Management Science* **61** (12): 2870–2889.

Translation of references in Russian into English

Borodin A.N. 2013. *Random Processes*. Saint Petersburg: New York (In Russian)

Vavilov S.A., Ermolenko K.Y. 2016. *Financial Mathematics. Stochastic Analysis*. Moscow: Mir Publ. (In Russian)

Vavilov S.A., Kuznetsov K.S. 2019. A stochastic control model for the average price of manufacturer sales on commodity exchanges. *Autom. Remote Control* (6): 142–155. (In Russian)

Wentzel A.D. 1975. *A Course in the Theory of Random Processes*. Moscow: Phasis Publ. (In Russian)

Oksendal B. 2013. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Moscow: Mir Publ. (In Russian)

Fleming W., Richelle R. 1978. *Optimal Control of Deterministic and Stochastic Systems*. Moscow: Mir Publ. (In Russian)

Shiryaev A.N. 1998. *Fundamentals of Stochastic Financial Mathematics*. Volume 1. Moscow: Phasis Publ. (In Russian)

Статья поступила в редакцию
30 января 2023 г.
Принята к публикации
20 марта 2023 г.

Selling price management of a highly liquid asset under given volume constraints

S.A. Vavilov

Economic faculty, St. Petersburg State University, Russia

K.V. Svetlov

Graduate School of Industrial Economics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia

T.A. Pustovalova

Graduate School of Management, St. Petersburg State University, Russia

Goal: this paper considers the selling strategy of a highly liquid asset traded at market prices. The purpose of this paper is to develop a management that provides an improvement in the weighted average selling price. **Methodology:** it is assumed that market prices follow a diffusion process in which the drift and volatility coefficients are random functions of time. Under the given assumptions, using the stochastic differential equation theory we build a sales management in which only the prices of exchange transactions act as feedback. **Findings:** the management constructed in the present research allows the seller to hedge against sharp drops in market prices by artificially raising the weighted average selling price due to the implementation of a speculative trading strategy. **Originality and contribution of the authors:** in contrast to the management proposed earlier, this paper provides a lower limit on the minimum number of assets that must be traded, as well as constraints on the maximum possible number of assets allowed to be traded. Examples of virtual trading on real world exchanges are given, demonstrating the effect of the imposed restrictions on the values of the weighted average selling prices.

Keywords: random process, sales management, sales planning, risk hedging, price management.

For citation: Vavilov S.A., Svetlov K.V., Pustovalova T.A. 2023. Selling price management of a highly liquid asset under given volume constraints. *Russian Management Journal* **21** (1): 23–38. https://doi.org/10.21638/spbu18.2023.102 (In Russian)

Для цитирования: Вавилов С.А., Светлов К.В., Пустовалова Т.А. 2023. Управление ценой продаж высоколиквидного актива при заданных ограничениях по объему. *Российский журнал менеджмента* **21** (1): 23–38. https://doi.org/10.21638/spbu18.2023.102

Initial Submission: January 30, 2023
Final Version Accepted: March 20, 2023